031021P Tilastomatematiikka

2. välikoe 14.03.2024, kello 16:15-19:15

VÄLIVAIHEET JA PERUSTELUT NÄKYVIIN, KIITOS!
PELKÄSTÄ VASTAUKSESTA EI SAA PISTEITÄ.

1. Tarkastellaan ydinvoimalassa tarvittavien polttoainesauvojen rikastusastetta prosentteina. Mitattiin 12 sauvan rikastusaste, mistä saatiin seuraava havaintoaineisto

2.94	2.75	2.75	2.81	2.90	2.90
2.82	2.95	3.00	2.95	3.00	3.05

   (a) Mikä on otoksen perusteella rikastusasteen odotusarvon hyvä piste-estimaatti? (1p)

   (b) Muotoile tilanteeseen sopivat hypoteesit ja testaa ne 5 % merkitsevyystasolla, kun halutaan tutkia onko rikastusaste 2.95. (4p)

   (c) Mikä on pienin mahdollinen merkitsevyystaso, jolla nollahypoteesi hylätään tämän otoksen perusteella? (1p)

2. Tuija Tuotekehittäjä havaitsi, että lisäämällä polttoaineeseen tiettyä lisäainetta pystyttiin vähentämään palamisessa syntyviä typen oksideja NO_x. Hän lisäsi eri määriä lisäainetta tiettyyn määrään polttoainetta ja sai seuraavat havainnot.

Lisäaineen määrä	1	2	3	4	5
NO_x	19	17	14	13	12

   (a) Määrää havaintoja vastaava regressiosuora, kun lisäaineen määrällä halutaan selittää typen oksidipäästöjä. (1p)

   (b) Laske regressiosuoran kulmakertoimen 95 % luottamusväli tilanteeseen sopivan testimuuttujan avulla. (3p)

   (c) Laske mallin antama ennuste, kun lisäaineen määrä on 12. Miten tulkitset tuloksen? (2p)

3. Olkoon (X, Y) satunnaisvektori, jonka kovarianssimatriisi on

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{XX} & \sigma_{XY} \\ \sigma_{YX} & \sigma_{YY} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

   (a) Määrää hajonnat σ_X ja σ_Y. (1p)

   (b) Määrää muuttujien X ja Y välinen korrelaatio. (2p)

   (c) Laske summan $\frac{1}{2\sqrt{35}}X + \frac{2}{\sqrt{35}}Y$ varianssi. (3p)

   (Jokeri) Jos satunnaisvektorin (X, Y) odotusarvo on $(0, 0)$ ja kovarianssimatriisi (1), niin mikä on satunnaisvektorin $\left(\frac{1}{2}X, \frac{1}{2\sqrt{35}}X + \frac{2}{\sqrt{35}}Y\right)$ kovarianssimatriisi? (+2p)

KAAVAKOKOELMA SEURAAVALLA SIVULLA

Kaavoja

Todennäköisyyden ominaisuuksia

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B),$$
$$\mathbb{P}(A \backslash B) = \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B),$$
$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A),$$
$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B),$$
$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A)}{\mathbb{P}(B)},$$
$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_k)\mathbb{P}(A_k)$$

Odotusarvoja ja variansseja

Ptnf. tai tf.	$\mu_X := \mathbb{E}(X)$	$\sigma_X^2 := \mathrm{Var}(X)$
$\mathbb{P}(X = x)$	$\sum_x x\mathbb{P}(X = x)$	$\sum_x (x - \mu_X)^2 \mathbb{P}(X = x)$
$f_X(x)$	$\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \mathrm{d}x$	$\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) \mathrm{d}x$
$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$	np	$np(1-p)$
$p(1-p)^{x-1}$	$1/p$	$(1-p)/p^2$
$\frac{a^x}{x!}\mathrm{e}^{-a}$	a	a
$1/(b-a)$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
$\theta \mathrm{e}^{-\theta x}$	$1/\theta$	$1/\theta^2$
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y), \quad \mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

Eräitä testimuuttujia

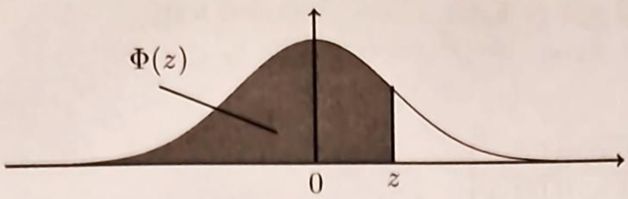
$$\frac{\frac{X}{n} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0,1), \quad \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \text{ (likimain, kun "n on suuri")},$$
$$\frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1},$$
$$\frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}\sqrt{\frac{(n-1)S_x^2 + (m-1)S_y^2}{n+m-2}}} \sim t_{n+m-2},$$
$$\sqrt{n-1}\, s_x \frac{\frac{S_{xY}}{s_{xx}} - \beta}{S_r} \sim t_{n-2}$$

Regressio, korrelaatio ja kovarianssi

$$r = \frac{s_{xy}}{\sqrt{s_{xx}}\sqrt{s_{yy}}}; \quad s_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}); \quad s_{xx} = s_x^2;$$
$$y = a + bx; \quad b = \frac{s_{xy}}{s_{xx}}; \quad a = \overline{y} - b\overline{x};$$
$$s_r^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)^2 = \frac{n-1}{n-2}(1 - r^2)s_{yy};$$
$$\sigma_{XY} = \mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))), \quad \sigma_{XX} = \sigma_X^2;$$
$$= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$
$$\rho(X,Y) = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

Standardisoitu normaalijakauma

Kertymäfunktion arvoja pisteissä z.



Tiheysfunktio

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$$

Kertymäfunktio

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \varphi(u)\,du$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000