

031021P Tilastomatematiikka

1. välikoe 15.02.2024, kello 16:15-19:15

**VÄLIVAIHEET JA PERUSTELUT NÄKYVIIN, KIITOS!
PELKÄSTÄ VASTAUKSESTA EI SAA PISTEITÄ.**

1. Yleisin värisokeuden muoto on puna-vihersokeus, josta kärsii noin 8 % miehistä ja 0.5 % naisista. Tilastomatematiikan kurssille osallistuu 500 opiskelijaa, joista 28 % on naisia.
 - (a) Arvioi, kuinka monella kurssille osallistuvalla on punavihervärisokeus. Piirrä tilannetta havainnollistava puukaavio. (3p)
 - (b) Millä todennäköisyydellä punavihervärisokeudesta kärsivä on mies? (3p)
 2. Laske todennäköisyys $\mathbb{P}(2 \leq X \leq 5)$, kun X noudattaa
 - (a) normaalijakaumaa $N(4, 1)$. (2p)
 - (b) Poisson-jakaumaa $\text{Poi}(4)$. (2p)
 - (c) jatkuvaa tasajakaumaa $\text{Tas}(0, 4)$. (2p)
 3. Oletetaan, että Lauri Markkanen pääsee kauden aikana pelitilanteissa yrittämään 1000 kertaa koria ja että hän onnistuu yrityksissään 50 % todennäköisyydellä. Millä todennäköisyydellä hän onnistuu vähintään 520 yrityksessä?
 - (a) Määrää tilanteeseen sopiva satunnaismuuttuja ja anna laskentakaava, jolla kysytty todennäköisyys voidaan laskea. (2p)
 - (b) Laske kysytty todennäköisyys normaalijakauma-approksimaatiolla. Käytä jatkuvuuskorjausta. (4p)
- (Jokeri) Laske kysytty todennäköisyys simuloimalla. (+2p)

KAAVAKOKOELMA SEURAAVALLA SIVULLA

Kaavoja

Todennäköisyyden ominaisuuksia

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B),$$

$$\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B),$$

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A),$$

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A \cap B) / \mathbb{P}(B),$$

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A)}{\mathbb{P}(B)},$$

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(B|A_k)\mathbb{P}(A_k)$$

Odotusarvoja ja variansseja

Ptnf. tai tf.	$\mu_X := \mathbb{E}(X)$	$\sigma_X^2 := \text{Var}(X)$
$\mathbb{P}(X = x)$	$\sum_x x \mathbb{P}(X = x)$	$\sum_x (x - \mu_X)^2 \mathbb{P}(X = x)$
$f_X(x)$	$\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$	$\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx$
$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$	np	$np(1-p)$
$p(1-p)^{x-1}$	$1/p$	$(1-p)/p^2$
$\frac{a^x}{x!} e^{-a}$	a	a
$1/(b-a)$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
$\theta e^{-\theta x}$	$1/\theta$	$1/\theta^2$
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y), \quad \text{Var}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

Eräitä testimuuttujia

$$\frac{\frac{X}{n} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0, 1), \quad \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1) \text{ (likimain, kun "n on suuri")},$$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1},$$

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} \sqrt{\frac{(n-1)S_x^2 + (m-1)S_y^2}{n+m-2}}} \sim t_{n+m-2},$$

$$\sqrt{n-1} s_x \frac{\frac{S_{xy}}{S_{xx}} - \beta}{S_r} \sim t_{n-2}$$

Regressio, korrelaatio ja kovarianssi

$$r = \frac{s_{xy}}{\sqrt{s_{xx}}\sqrt{s_{yy}}}; \quad s_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}); \quad s_{xx} = s_x^2;$$

$$y = a + bx; \quad b = \frac{s_{xy}}{s_{xx}}; \quad a = \bar{y} - b\bar{x};$$

$$s_r^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2 = \frac{n-1}{n-2} (1-r^2) s_{yy};$$

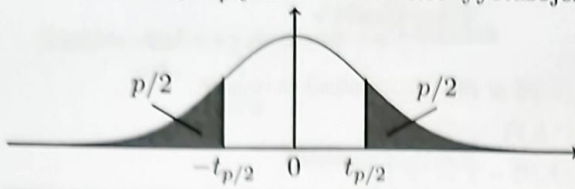
$$\sigma_{XY} = \text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))), \quad \sigma_{XX} = \sigma_X^2;$$

$$= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

$$\rho(X, Y) = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

Studentin t-jakauma

Kriittisiä arvoja t_p joillakin merkitsevyystasojen p ja vapausasteiden f arvoilla.



Esim. kaksisuuntainen testi
merkitsevyystasolla p .

f	merkitsevyystaso p yksisuuntaisessa testissä					
	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
	merkitsevyystaso p kaksisuuntaisessa testissä					
	0.10	0.05	0.02	0.01	0.002	0.001
1	6.314	12.706	31.821	63.657	318.309	636.619
2	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.599
3	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924
4	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
24	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
50	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261	3.496
60	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
80	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195	3.416
100	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174	3.390
200	1.653	1.972	2.345	2.601	3.131	3.340
500	1.648	1.965	2.334	2.586	3.107	3.310
∞	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291