

TILASTOMATEMATIIKKA

Harjoitusviikko 6, kevät 2024

Suosittelaa laskettavaksi **tehtävä 1**. Huomaa, että tämä harjoitus edellyttää osin *Excel*:n (tms. laskentaohjelmiston) käyttöä. Välivaiheiden ja perustelujen on oltava näkyvillä ohjelmiston käytöstä huolimatta.

1. Tutkittiin harjusten poikasten pituuden ja painon välistä yhteyttä ja saatiin seuraava havaintoaineisto.

pituus [cm]	18.0	17.8	16.0	17.3	17.4	14.5	16.4	17.2	19.5	16.3
paino [g]	66.5	76.7	47.3	59.0	74.7	39.9	48.2	61.7	101.8	63.0

- a) Piirrä (Excelillä) havaintoja vastaava sirontakuvio. Mitä voit sirontakuvion perusteella sanoa muuttujien välisestä riippuvuudesta?
- b) Laske muuttujien välinen korrelaatiokerroin. Määrä regressiosuora ja sen selitysaste. Käytä pituutta selittävänä muuttujana. Mitä voit tämän perusteella sanoa lineaarisen sovituksen sopivuudesta havaintoaineistoon?

- c) Muodosta malli

$$y = kx^n \quad (1)$$

pituuden x ja painon y välille. Laske parametrien k ja n piste-estimaatit sovittamalla regressiosuora muuttujien $\ln y$ ja $\ln x$ välille. Mitä voit sanoa parametrin n tarkkuudesta?

- d) Laske mallin (1) antama ennuste harjuksen painolle, kun pituus on 25 cm.
- e) Laske parametrin n 95 % kaksisuuntainen symmetrinen luottamusväli.
- f) Muotoile sopivat parametria n koskevat hypoteesit ja testaa ne 5 % merkitsevyydellä. Miten tulkitset tuloksen?

2. Hooken lain mukaan jouseen kiinnitettynä olevaan kappaleeseen kohdistuva voima F saadaan kaavasta

$$F = -kx, \quad (2)$$

missä k on jousivakio ja x on poikkeama tasapainoasemasta.

- a) Jousivakion k määrittämistä varten tehtiin mittauksia ja saatiin seuraavat havainnot

F	2	3	5	7
x	-0.14	-0.19	-0.32	-0.51

Määrä luennoissa esitetyllä *pienimmän neliösumman menetelmällä* havainnoista saatava estimaatti jousivakiolle k minimoimalla neliösumma

$$f(k) = \sum_{i=1}^4 (F_i - (-kx_i))^2. \quad (3)$$

- b) Mallin (2) havaintoja vastaava selitysaste R^2 määritellään kaavalla

$$R^2 = 1 - \frac{s_{\text{Res}}}{(n-1)s_{FF}}, \quad (4)$$

missä s_{FF} on muuttujan F otosvarianssi ja residuaalisummassa

$$s_{\text{Res}} = \sum_{i=1}^n (F_i - (-kx_i))^2$$

esiintyvä jousivakio k on (3):n minimikohta. Mitä arvoja kaavalla (4) määritelty selitysaste saa? Laske mallin (2) selitysaste.

- c) Laske otoksen korrelaatiokerroin r . Onko b)-kohdassa laskettu selitysaste R^2 sama kuin korrelaatiokertoimen neliö r^2 ?
3. Tutkittiin transistorin kantavirran y [mA] ja kanta-emitterijännitteen x [V] välistä yhteyttä. Saatiin seuraavat mittaukset

x	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
y	0.734	0.886	1.04	1.19	1.35	1.50	1.66	1.81	1.97	2.12

- a) Laske muuttujien välinen korrelaatiokerroin.
- b) Määrää havaintoja vastaava regressiosuora ja sen selitysaste. Piirrä havaintopisteet ja regressiosuora samaan koordinaatistoon.
- c) Laske mallin antama ennuste kantavirralle, kun jännite on 2 [V].
- d) Muodostetaan regressiomalli
- $$Y_i = \alpha + \beta x_i + \epsilon_i \quad (5)$$
- muuttujien välille. Laske kulmakertoimen β symmetrinen 95% luottamusväli.
- e) Testaa riskitasolla 5% hypoteesit $H_0 : \alpha = 0$ vastaan $H_1 : \alpha \neq 0$. Mikä on johtopäätös?
4. Tutkittiin kaasun paineen P ja tilavuuden V välistä yhteyttä ja saatiin seuraava havaintoaineisto

V [cm ³]	50	60	70	90	100
p [kg/cm ³]	64.7	51.3	40.5	25.9	7.8

- a) Piirrä (Excelillä) havaintoja vastaava sirontakuviio. Mitä voit tämän perusteella sanoa muuttujien välisestä riippuvuudesta?
- b) Laske muuttujien välinen korrelaatiokerroin. Määrää regressiosuora ja sen selitysaste. Mitä voit tämän perusteella sanoa lineaarisen sovituksen sopivuudesta havaintoaineistoon?
- c) Jospa meillä onkin tiedossa enemmän informaatiota mittaustuloksista. Oletetaan, että data on peräisin polytrooppisesta prosessista, joka noudattaa tilanyhtälöä

$$pV^n = C, \quad (6)$$

missä n on prosessia kuvaava indeksi ja C on vakio. Estimoi datan avulla mallin (6) n ja C . Käytä hyväksi Excelin Data Analysis Toolpakin regressio-toimintoa ja käytössäsi olevaa laskinta.

Vihje: Ota luonnollinen logaritmi puolittain yhtälössä (6) ja sovita sitten dataan regressiosuora.

- d) Vakioentropiselle prosessille $n = \gamma$, missä γ on ominaislämpökapasiteettien c_p ja c_v suhde, $\gamma = c_p/c_v$. Kaasuille tyypillisesti $\gamma \leq 5/3$. Muotoile sopivat hypoteesit indekseille n ja testaa ne merkitsevyydellä $\alpha = 0.025$, kun meitä kiinnostaa oliko prosessi vakioentropinen vai ei. Käytä apuna Exceliä ja käytössäsi olevaa laskinta.
- Vihje:** Mikä n on c)-kohdasta saadulle regressiosuoralle?

5. Insinöörit kehittivät piistä koostuvan nanopilari-rakenteen litteän piikalvon päälle parantaakseen elektronien emissiota. Tarkka rakenne voi vaikuttaa sähköisiin ominaisuuksiin, minkä vuoksi 50 nanopilarin leveys ja korkeus mitattiin yksikkönä nanometri [nm]. Mitätaesarvot löytyvät taulukosta, joka löytyy myös Moodle-työtilasta csv-tiedostona.

Leveys	62	68	69	80	68	79	83	70	74	73	74	75	80
Korkeus	221	234	245	266	265	253	274	278	290	276	272	276	276
Leveys	77	80	83	73	79	100	93	92	101	87	96	99	94
Korkeus	290	292	289	284	271	292	308	303	308	315	309	300	305
Leveys	102	95	90	98	86	93	91	90	95	97	87	89	100
Korkeus	298	312	297	314	305	296	304	310	315	311	337	338	336
Leveys	93	92	98	101	97	102	91	87	110	106	118		
Korkeus	323	343	330	333	346	364	366	355	390	373	391		

- Laske regressiosuora, joka ennustaa nanopilarin korkeuden y leveyden x funktiona.
- Laske regressiosuora, joka ennustaa nanopilarin leveyden korkeuden funktiona. Ratkaise saadusta suoran yhtälöstä korkeus leveyden funktiona. Vertaa tulosta a)-kohtaan. Mitä havaitset?
- Piirrä sirontakuvio ja a)-kohdan regressiosuora samaan koordinaatistoon.
- Muodosta regressiomalli $Y = \alpha + \beta x + \epsilon$ leveyden x ja korkeuden Y välille. Testaa riskitasolla $\alpha = 5\%$, onko kulmakerroin nolasta poikkeava.
- Laske kulmakertoimen 95 % luottamusväli. Mitä voit tämän perusteella sanoa d)-kohdan johtopäätöksestä?
- Laske (Excelillä) nanopilarin korkeuden odotusarvon 95 % luottamusväli, kun leveys on 100 ja käytetään d)-kohdan mallia.
- Laske (Excelillä) nanopilarin korkeuden 95 % ennusteväli, kun leveys on 100 ja käytetään d)-kohdan mallia.

Kohdissa f) ja g) voit ottaa mallia vaikkapa videosta

<https://www.youtube.com/watch?v=Z6Bjb7pQnoA>