TILASTOMATEMATIIKKA

Harjoitusviikko 1, kevät 2024

Harjoituksen teemoja ovat:

(i) Joukko-opin peruslaskutoimitukset

(ii) Satunnaiskoe, otosavaruus ja tapahtuma

(iii) Todennäköisyyden peruslaskutoimitukset

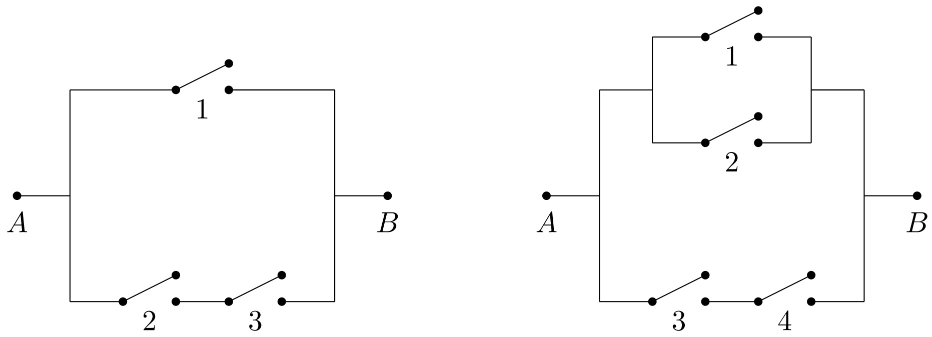
(iv) Tapahtumien riippumattomuus

(v) Ehdollinen todennäköisyys

(vi) Kokonaistodennäköisyys ja Bayesin kaava

Tehtävät 1-4 käsittelevät ensisijaisesti teemoja (i)-(iv), joita käsitellään pääasiassa alkuviikon harjoituksissa. Teemat (v) ja (vi) on lähtökohtaisesti tarkoitettu käsiteltäväksi loppuviikon harjoituksissa. Myös nopeampi eteneminen on mahdollista, jos kokee hallitsevansa alkuviikon asiat. Alkuviikon harjoituksissa suositellaan laskettavaksi **tehtävät 1 ja 2** ja loppuviiikon harjoituksissa **tehtävät 5 ja 6**.

1. Tarkastellaan oheisessa kuvassa olevaa kahta virtapiiriä, jotka koostuvat rinnan tai sarjaan kytketyistä kytkimistä. Sähkö pääsee kulkemaan kytkimen läpi vain, jos se on kiinni. Sitä varten olkoon K_i tapahtuma ”virtapiirin kytkin i on kiinni”.



Kuva 1: Eräitä virtapiirejä

a) Esitä molemmille piireille joukko-opillisesti tapahtumien K_i avulla tapahtumat

$$V = \text{”A:sta virtaa sähkö pisteeseen B”},$$
$$E = \text{”A:sta ei virtaa sähkö pisteeseen B”}.$$

Piirrä Vennin diagrammi vasemman puoleisen piirin tapahtumalle V.

b) Oletetaan, että kytkimet ovat kiinni toisista riippumatta 90 % todennäköisyydellä. Millä todennäköisyydellä virtapiirit toimivat, kun toimiminen tarkoittaa sitä, että pisteestä A virtaa sähkö pisteeseen B?

2. Oletetaan, että Lauri Markkanen pussittaa vapaaheiton 88 % todennäköisyydellä ja että hän saa 3 vapaaheittoa.

a) Määrää kolmen vapaaheiton tuloksia kuvastava otosavaruus, kun meitä kiinnostaa, pussittaako Markkanen pallon vai ei.

b) Millä todennäköisyydellä Markkanen pussittaa kaikki vapaaheitot?

c) Millä todennäköisyydellä Markkanen pussittaa ainakin yhden vapaaheiton?

d) Millä todennäköisyydellä Markkanen pussittaa kaksi vapaaheittoa, jos hän on heittänyt ensimmäisen heiton ohi?

3. Oletetaan, että 100 satunnaisesti valitun teekkarin joukossa 54 opiskelee fysiikkaa, 69 opiskelee matematiikkaa sekä 35 opiskelee matematiikka ja fysiikkaa. Merkitse seuraavat tapahtumat joukko-opillisesti ja määrää todennäköisyys, että opiskelija

   a) opiskelee matematiikkaa tai fysiikkaa.

   b) ei opiskele kumpaakaan näistä aineista.

   c) opiskelee matematiikkaa, muttei fysiikkaa.

4. Olkoot A ja B tapahtumia, joille $\mathbb{P}(A) = 0.3$, $\mathbb{P}(B) = 0.5$ ja $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.24$.

   a) Laske todennäköisyydet $\mathbb{P}(A \cup B), \mathbb{P}(\overline{A} \cup B), \mathbb{P}(A \setminus B)$ ja $\mathbb{P}(\overline{A} \cup \overline{B})$.

   b) Ovatko tapahtumat A ja B riippumattomia? Entäpä A ja $\overline{B}$?

5. Kaksi tehdasta A ja B valmistaa radioita. Jokainen tehtaalla A valmistettu radio on viallinen todennäköisyydellä 0.05, kun taas tehtaalla B valmistettu radio on viallinen todennäköisyydellä 0.01. Ostetaan 2 radiota, jotka molemmat ovat yhtä todennäköisesti peräisin joko tehtaalta A tai tehtaalta B.

   a) Millä todennäköisyydellä molemmat ovat viallisia?

   b) Jos ensimmäinen radio, jonka testaat, on viallinen, niin millä todennäköisyydellä myös toinen on viallinen?

   c) Jos molemmat radiot todetaan viallisiksi, niin millä todennäköisyydellä ne olivat peräisin tehtaalta A?

6. Vakuutusyhtiö uskoo, että ihmiset voidaan jakaa kahteen ryhmään: tapaturma-alttiisiin ja ihmisiin, jotka eivät ole tapaturma-alttiita. Yhtiön mukaan tapaturma-altiille henkilölle sattuu jokin vahinko yhden vuoden aikana 40 % todennäköisyydellä, kun taas vahingon todennäköisyys on 20 % henkilölle, joka ei ole tapaturma-altis. Oletetaan, että 30 % ihmisistä on tapaturma-alttiita.

   a) Millä todennäköisyydellä uudelle asiakkaalle sattuu vahinko vuoden sisällä?

   b) Jos uudelle asiakkaalle sattuu vahinko vuoden sisällä, niin millä todennäköisyydellä hän on tapaturma-altis?

   c) Ovatko onnettomuuden sattuminen ja tapaturma-alttius riippumattomia?

7. Pumpun venttiilin toimintaa valvotaan automaattisella hälytysjärjestelmällä. Todennäköisyys sille, että järjestelmä hälyttää, kun venttiili ei toimi, on 0.98. Todennäköisyys sille, että järjestelmä ei hälytä, kun venttiili toimii, on 0.985. Todennäköisyys sille, että venttiili ei toimi, on 0.00001. Määrää todennäköisyys sille, että venttiili ei toimi, kun järjestelmä hälyttää.

8. Erästä tietoliikennelinjaa pitkin pystyttiin lähettämään kahta erilaista merkkijonoa: 000 ja 111. Tiedettiin, että jonon 000 lähettämistodennäköisyys oli 0.3. Häiriöiden vuoksi kummankin jonon yksittäinen bitti vastaanotetaan oikein todennäköisyydellä 0.6. Lisäksi tiedetään, että bitit siirtyvät linjalla toisistaan riippumattomasti. Kumpi on todennäköisemmin lähetetty merkkijono, jos vastaanotetaan merkkijono 010?

9. Tunnetusti geneettinen perimä vaikuttaa useisiin sairauksiin, joten on tärkeää pystyä ennustamaan lasten riskiä saada sairautta aiheuttava perimä. Oletetaan yksinkertaisuuden

vuoksi, että sairautta voidaan ennustaa yhden geeniparin avulla, jossa toinen geeni periytyy äidiltä ja toinen isältä. Geenillä on 2 muotoa: A, joka on dominoiva, ja a, joka on resessiivinen.

Oletetaan, että henkilöllä on riski sairastua tautiin vain, jos geeniperimä on aa, ja että kaikki geeniparit ovat yhtä todennäköisiä. Oletetaan, että perheen isällä on taudin aiheuttava geneettinen riski ja että perheen äidillä ei ole riskiä. Jos perheeseen syntyy kaksi lasta, niin millä todennäköisyydellä

a) kummallakaan lapsella ei ole riskiä sairastua tautiin, jos äidillä on AA?

b) kummallakaan lapsella ei ole riskiä sairastua tautiin?

c) äidillä on AA, jos kummallakaan lapsella ei ole riskiä sairastua tautiin?