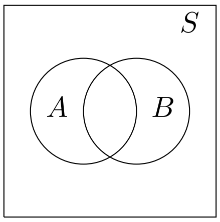
Tilastomatematiikka

Loppukoe 03.05.2018

1. Kuvaan 1 piirretyssä Vennin diagrammissa suorakaide kuvastaa otosavaruutta S ja ympyrät joukkoja A ja B.

   a) Anna esimerkki diagrammiin sopivista tapahtumista A ja B ja määrää todennäköisyydet tapahtumille A, B ja $A \cup B$. (5p)

   b) Ovatko a)-kohdassa antamasi tapahtumat A ja B riippumattomia? (1p)



Kuva 1: Vennin diagrammi

2. Laske todennäköisyys $P(X \leq 2)$, kun

   a) $X \sim N(0, 2)$.

   b) $X \sim \text{Bin}(10, \frac{1}{5})$.

   c) $X \sim \text{Poi}(2)$.

3. Testaa 95% luottamustasolla hypoteesi $H_0 : \mu = 100$ vastaan $H_1 : \mu < 100$, kun on tehty mittaukset

   94 101 93 101 91 95 100 100

   Määrää tilanteeseen sopiva testimuuttuja ja laske sen arvo otoksessa. Mikä on kriittisen alueen raja?

4. Tutkittiin erään kemiallisen yhdisteen liukenemista veteen. Taulukkoon on koottu liuenneen aineen määrä y [g] eri lämpötiloissa x [$°C$].

x	0	15	30	45	60	75
y	8	12	25	31	44	48

   a) Laske havaintoja vastaava regressiosuora ja määrää lineaarisen mallin selitysaste. (2p)

   b) Muodostetaan muuttujien välille regressiomalli $Y_i = \alpha + \beta x_i + \epsilon$, missä $\epsilon \sim N(0, \sigma^2)$. Laske kulmakertoimen β symmetrinen 95% luottamusväli. (4p)

5. Muuttujien X ja Y yhteisjakauman pistetodennäköisyydet ovat

$X \backslash Y$	0	1
0	0.21	0.26
1	0.19	0.34

   a) Määrää muuttujien X ja Y odotusarvo. (2p)

   b) Laske muuttujien X ja Y välinen korrelaatiokerroin. (4p)

6. Anna arvio tästä kokeesta saamastasi pistemäärästä. Jos arviosi on kahden pisteen sisällä todellisista pisteistä, saat yhden lisäpisteen.

Kaavoja

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\
&\mathrm{P}(A\backslash B)=\mathrm{P}(A\cap\bar{B})=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)\\
&\mathrm{P}(\bar{A})=1-\mathrm{P}(A)\\
&\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A\cap B)/\mathrm{P}(B)\\
&f(x)=1/(b-a),\ \mathrm{E}(X)=(a+b)/2,\ \mathrm{Var}(X)=(b-a)^2/12\\
&f(x)=\theta e^{-\theta x},\ \mathrm{E}(X)=1/\theta,\ \mathrm{Var}(X)=1/\theta^2\\
&\mathrm{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\ \mathrm{E}(X)=np,\ \mathrm{Var}(X)=np(1-p)\\
&\mathrm{P}(X=k)=p(1-p)^{k-1},\ \mathrm{E}(X)=1/p,\ \mathrm{Var}(X)=(1-p)/p^2\\
&\mathrm{P}(X=k)=\frac{a^k}{k!}e^{-a},\ \mathrm{E}(X)=a,\ \mathrm{Var}(X)=a\\
&\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)\ \text{(likimain, kun ”n on suuri”)}\\
&\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t_{n-1}\\
&\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\sqrt{\frac{(n-1)S_x^2+(m-1)S_y^2}{n+m-2}}}\sim t_{n+m-2};\\
&r=\frac{s_{xy}}{\sqrt{s_{xx}}\sqrt{s_{yy}}};\ s_{xy}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y});\ s_{xx}=s_x^2;\\
&y=a+bx;\quad b=\frac{s_{xy}}{s_{xx}};\quad a=\overline{y}-b\overline{x}\\
&s_r^2=\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)^2=\frac{n-1}{n-2}(1-r^2)s_{yy}\\
&\sqrt{n-1}s_x\frac{\frac{S_{xY}}{s_{xx}}-\beta}{S_r}\sim t_{n-2};\\
&\mathrm{E}(aX+bY)=a\mathrm{E}(X)+b\mathrm{E}(Y);\quad \mathrm{Var}(X)=\mathrm{E}((X-\mathrm{E}(X))^2);\\
&\sigma_{XY}=\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{E}((X-\mathrm{E}(X))(Y-\mathrm{E}(Y))),\quad \sigma_{XX}=\sigma_X^2;\\
&\qquad=\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)\\
&\rho(X,Y)=\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\cdot\sigma_Y}.
\end{aligned}
$$

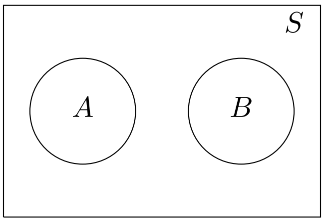
Tilastomatematiikka

Kesätentti 09.06.2018

1. Kuvaan 1 piirretyssä Vennin diagrammissa suorakaide kuvastaa otosavaruutta S ja ympyrät joukkoja A ja B.

   a) Anna esimerkki diagrammiin sopivista tapahtumista A ja B ja todennäköisyyksistä tapahtumille A, B ja $A \cap B$. (5p)

   b) Ovatko a)-kohdassa antamasi tapahtumat A ja B riippumattomia? (1p)



Kuva 1: Vennin diagrammi

2. Satunnaismuuttujan X kertymäfunktio on

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{4}{5}x^2 + \frac{1}{5}x, & 0 < x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

   a) Laske todennäköisyys $P(0 \leq X \leq \frac{2}{5})$.

   b) Laske odotusarvo $E(X)$.

   c) Laske keskihajonta σ_X.

3. Kyselytutkimuksella haluttiin selvittää sote-uudistuksen kannatusta. Mielipide kysyttiin 1000 kansalaiselta, joista 587 vastusti sote-uudistusta. Määrää sote-uudistusta vastustavien suhteellisen osuuden 95% luottamusväli.

4. Hankalasti vaihdettavan komponentin käyttöiältä vaadittiin, että sen odotettavissa oleva käyttöikä on ainakin 95 %:n varmuudella vähintään 1100 käyttötuntia. Järkevän hintatarjouksen tehneen valmistajan komponentteja testattiin valitsemalla tuotannosta satunnaisesti 15 komponenttia, jotka käytettiin loppuun aidoissa olosuhteissa. Havaitut komponenttien kestoiät tunteina olivat

$$998, 1217, 1093, 1124, 1270, 1220, 1018, 1096, 1150, 1111, 1311, 1005, 1190, 1075, 1060.$$

   Testaa hypoteesit $H_0 : \mu \leq 1100$ vastaan $H_1 : \mu > 1100$ riskitasolla 5 %. Kannattaako komponentteja tämän otoksen perusteella hankkia kyseiseltä valmistajalta?

5. Muuttujien X ja Y yhteisjakauman pistetodennäköisyydet ovat

$X \backslash Y$	0	1
0	0.03	0.22
1	0.20	0.55

   a) Määrää muuttujien X ja Y odotusarvo. (2p)

   b) Laske muuttujien X ja Y välinen korrelaatiokerroin. (4p)

Kaavoja

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$$
$$\mathrm{P}(A \backslash B) = \mathrm{P}(A \cap \bar{B}) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B)$$
$$\mathrm{P}(\bar{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$$
$$\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A \cap B)/\mathrm{P}(B)$$
$$f(x) = 1/(b-a),\ \mathrm{E}(X) = (a+b)/2,\ \mathrm{Var}(X) = (b-a)^2/12$$
$$f(x) = \theta e^{-\theta x},\ \mathrm{E}(X) = 1/\theta,\ \mathrm{Var}(X) = 1/\theta^2$$
$$\mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ \mathrm{E}(X) = np,\ \mathrm{Var}(X) = np(1-p)$$
$$\mathrm{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1},\ \mathrm{E}(X) = 1/p,\ \mathrm{Var}(X) = (1-p)/p^2$$
$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a},\ \mathrm{E}(X) = a,\ \mathrm{Var}(X) = a$$
$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \text{ (likimain, kun ”n on suuri”)}$$
$$\frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$
$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} \sqrt{\frac{(n-1)S_x^2 + (m-1)S_y^2}{n+m-2}}} \sim t_{n+m-2};$$
$$r = \frac{s_{xy}}{\sqrt{s_{xx}}\sqrt{s_{yy}}};\ s_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y});\ s_{xx} = s_x^2;$$
$$y = a + bx; \quad b = \frac{s_{xy}}{s_{xx}}; \quad a = \overline{y} - b\overline{x}$$
$$s_r^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2 = \frac{n-1}{n-2}(1 - r^2) s_{yy}$$
$$\sqrt{n-1}\, s_x \frac{\frac{S_{xY}}{s_{xx}} - \beta}{S_r} \sim t_{n-2};$$
$$\mathrm{E}(aX + bY) = a\mathrm{E}(X) + b\mathrm{E}(Y); \quad \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}((X - \mathrm{E}(X))^2);$$
$$\sigma_{XY} = \mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}((X - \mathrm{E}(X))(Y - \mathrm{E}(Y))), \quad \sigma_{XX} = \sigma_X^2;$$
$$= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$$
$$\rho(X,Y) = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}.$$

Tilastomatematiikka

Loppukoe 13.09.2018

1. Olkoot A ja B tapahtumia, joille $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.5$ ja $P(A \cap B) = 0.24$.

   a) Laske todennäköisyydet $P(A \cup B), P(\overline{A} \cup B), P(A \setminus B)$ ja $P(\overline{A} \cup \overline{B})$. (4p)

   b) Ovatko tapahtumat A ja B riippumattomia? Entäpä A ja $\overline{B}$? (2p)

2. Eräällä tuotantolinjalla on kaksi konetta, joista kone 1 tekee 70% tuotteista ja kone 2 loput 30%. Tiedetään, että koneen 1 valmistamista tuotteista on 2% viallisia ja koneen 2 valmistamista tuotteista on 3% viallisia.

   a) Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu tuote on viallinen?

   b) Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu viallinen tuote on koneen 1 valmistama?

3. Poliitikko väittää, että 30 prosenttia kansasta kannattaa hänen ehdotusta. Kyselytutkimuksessa kysytään 1600 henkilön mielipidettä ja heistä 431 ilmoittaa kannattavansa kyseistä ehdotusta. Laske otoksesta normaaliapproksimaation avulla 95 prosentin luottamusväli ehdotuksen kannatukselle. Pitääkö poliitikon väite paikkansa?

4. Tarkastellaan hypoteesien $H_0\, \mu = 100$ ja $H_1 : \mu < 100$ testausta luottamustasolla 95%, kun on suoritettu mittaukset

$$90.1, 99.4, 92.9, 96.8, 98.9, 93.2, 100.1, 100.1.$$

   a) Valitse tilanteeseen sopiva testimuuttuja. Mikä on testimuuttujan arvo otoksessa?

   b) Mikä on kriittisen alueen raja?

   c) Miten tehdään johtopäätös? Ilmoita johtopäätös annetuille hypoteeseille ja havaintoaineistolle.

5. Heitetään kolme kertaa virheetöntä kolikkoa. Olkoon X ilmestyvien kruunien lukumäärä ja Y kahdessa ensimmäisessä heitossa esiintyvien klaavojen lukumäärä.

   a) Esitä intuitiivinen perustelu, miksi X ja Y eivät ole riippumattomia. Totea sama asia laskemalla. (2p)

   b) Laske muuttujien X ja Y välinen kovarianssi. (4p)

Kaavoja

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)\\
&\mathrm{P}(A \backslash B) = \mathrm{P}(A \cap \bar{B}) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B)\\
&\mathrm{P}(\bar{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)\\
&\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A \cap B)/\mathrm{P}(B)\\
&f(x) = 1/(b-a),\ \mathrm{E}(X) = (a+b)/2,\ \mathrm{Var}(X) = (b-a)^2/12\\
&f(x) = \theta e^{-\theta x},\ \mathrm{E}(X) = 1/\theta,\ \mathrm{Var}(X) = 1/\theta^2\\
&\mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ \mathrm{E}(X) = np,\ \mathrm{Var}(X) = np(1-p)\\
&\mathrm{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1},\ \mathrm{E}(X) = 1/p,\ \mathrm{Var}(X) = (1-p)/p^2\\
&\mathrm{P}(X = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a},\ \mathrm{E}(X) = a,\ \mathrm{Var}(X) = a\\
&\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \text{ (likimain, kun ”n on suuri”)}\\
&\frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}\\
&\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} \sqrt{\frac{(n-1)S_x^2 + (m-1)S_y^2}{n+m-2}}} \sim t_{n+m-2};\\
&r = \frac{s_{xy}}{\sqrt{s_{xx}}\sqrt{s_{yy}}};\ s_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y});\ s_{xx} = s_x^2;\\
&y = a + bx; \quad b = \frac{s_{xy}}{s_{xx}}; \quad a = \overline{y} - b\overline{x}\\
&s_r^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2 = \frac{n-1}{n-2}(1 - r^2) s_{yy}\\
&\sqrt{n-1}\, s_x \frac{\frac{S_{xY}}{s_{xx}} - \beta}{S_r} \sim t_{n-2};\\
&\mathrm{E}(aX + bY) = a\mathrm{E}(X) + b\mathrm{E}(Y); \quad \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}((X - \mathrm{E}(X))^2);\\
&\sigma_{XY} = \mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}((X - \mathrm{E}(X))(Y - \mathrm{E}(Y))), \quad \sigma_{XX} = \sigma_X^2;\\
&\qquad = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)\\
&\rho(X,Y) = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}.
\end{aligned}
$$

Tilastomatematiikka

Loppukoe 08.11.2018

1. Olkoon $S = \{a, b, c, d, e\}$ erään satunnaiskokeen otosavaruus ja alkeistapahtumiin liittyvät todennäköisyydet

s	a	b	c	d	e
$P(\{s\})$	0.1	0.1	0.2	0.4	0.2

Olkoot $A = \{a, b, c\}$ ja $B = \{c, d, e\}$ tapahtumia. Laske todennäköisyydet

$$P(A),\ P(B),\ P(A \cup B),\ P(A \cap B) \text{ ja } P(A|B).$$

2. Digitaalisessa viestintäkanavassa yksittäinen bitti vastaanotetaan virheellisenä todennäköisyydellä 10^{-5} muista biteistä riippumatta. Jos lähetetään 16 miljoonaa bittiä, niin millä todennäköisyydellä vastaanotetaan enemmän kuin 150 virheellistä bittiä?

   a) Määrää tilanteeseen sopiva satunnaismuuttuja ja anna laskentakaava, jolla kysytty todennäköisyys voidaan laskea. Itse todennäköisyyttä ei tarvitse laskea. (2p)

   b) Laske kysytty todennäköisyys normaalijakauma-approksimaatiota käyttämällä. (4p)

3. Insinöörin täytyy estimoida populaation tuntematonta odotusarvoa. Sitä varten hän tekee joitakin mittauksia. Oletetaan, että hän kerää normaalisti jakautuneen satunnaisotoksen $1, 2, 3, 4, 5$.

   a) Määrää odotusarvolle sopiva piste-estimaatti. (2p)

   b) Laske odotusarvon 95% luottamusväli. (4p)

4. Tarkastellaan dataa

x	1	2	3	4	5	6
y	14	33	40	63	76	85

   a) Piirrä dataa vastaava sirontakuvio. Mitä voit sanoa muuttujien x ja y lineaarisesta riippuvuudesta sirontakuvion perusteella? (2p)

   b) Testaa regressiosuoran kulmakerrointa koskevat hypoteesit $H_0 : \beta = 0$ vastaan $H_1 : \beta \neq 0$ käyttämällä 95% luottamustasoa. (4p)

5. Olkoon (X, Y) satunnaisvektori, jonka jakauma on seuraavan taulukon mukainen.

$P(X = x, Y = y)$		Y		
		1	2	3
X	0	0.1	0.2	0.2
	1	0.2	0.3	0

   a) Ovatko X ja Y riippumattomia? (2p)

   b) Laske muuttujien X ja Y kovarianssi. (4p)

Kaavoja

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \backslash B) = P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$
$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$
$$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$$
$$f(x) = 1/(b-a),\ E(X) = (a+b)/2,\ \mathrm{Var}(X) = (b-a)^2/12$$
$$f(x) = \theta e^{-\theta x},\ E(X) = 1/\theta,\ \mathrm{Var}(X) = 1/\theta^2$$
$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ E(X) = np,\ \mathrm{Var}(X) = np(1-p)$$
$$P(X=k) = p(1-p)^{k-1},\ E(X) = 1/p,\ \mathrm{Var}(X) = (1-p)/p^2$$
$$P(X=k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a},\ E(X) = a,\ \mathrm{Var}(X) = a$$
$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \text{ (likimain, kun ”}n\text{ on suuri”)}$$
$$\frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$
$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} \sqrt{\frac{(n-1)S_x^2 + (m-1)S_y^2}{n+m-2}}} \sim t_{n+m-2};$$
$$r = \frac{s_{xy}}{\sqrt{s_{xx}}\sqrt{s_{yy}}};\ s_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y});\ s_{xx} = s_x^2;$$
$$y = a + bx; \quad b = \frac{s_{xy}}{s_{xx}}; \quad a = \overline{y} - b\overline{x}$$
$$s_r^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2 = \frac{n-1}{n-2}(1 - r^2) s_{yy}$$
$$\sqrt{n-1}\, s_x \frac{\frac{S_{xY}}{s_{xx}} - \beta}{S_r} \sim t_{n-2};$$
$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y); \quad \mathrm{Var}(X) = E((X - E(X))^2);$$
$$\sigma_{XY} = \mathrm{Cov}(X,Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))), \quad \sigma_{XX} = \sigma_X^2;$$
$$= E(XY) - E(X)E(Y)$$
$$\rho(X,Y) = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}.$$