TILASTOMATEMATIIKKA

Harjoitus 1 ratkaisut, kevät 2018

Harjoituksen teemoja ovat:

(i) Joukko-opin peruslaskutoimitukset

(ii) Satunnaiskoe, otosavaruus ja tapahtuma

(iii) Todennäköisyyden peruslaskutoimitukset

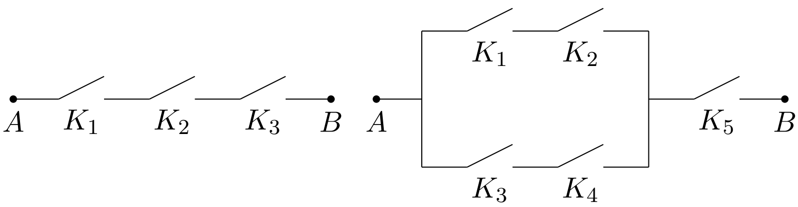
(iv) Tapahtumien riippumattomuus

(v) Ehdollinen todennäköisyys

(vi) Kokonaistodennäköisyys ja Bayesin kaava

Tehtävät 1-4 käsittelevät ensisijaisesti teemoja (i)-(iv), joita käsitellään pääasiassa alkuviikon harjoituksissa. Teemat (v) ja (vi) on lähtökohtaisesti tarkoitettu käsiteltäväksi loppuviikon harjoituksissa. Myös nopeampi eteneminen on mahdollista, jos kokee hallitsevansa alkuviikon asiat. **Minimivaatimuksena laskuharjoituspisteille** ovat alkuviikon **tehtävät 1 ja 4** ja loppuviikon **tehtävät 5 ja 8**.

1. Tarkastellaan oheisessa kuvassa olevaa kahta virtapiiriä. Olkoon E_i tapahtuma "virtapiirin kytkin K_i on kytketty".



Kuva 1: Eräitä virtapiirejä

a) Esitä molemmille piireille joukko-opillisesti tapahtumat

$$A_1 = \text{"A:sta virtaa sähkö pisteeseen B"},$$
$$A_2 = \text{"A:sta ei virtaa sähkö pisteeseen B"}.$$

Ratkaisu: Vasemmanpuoleiselle piirille

$$A_1 = E_1 \cap E_2 \cap E_3.$$

Koska A_1 ja A_2 ovat toistensa komplementteja, niin De Morganin kaavasta $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ seuraa

$$A_2 = \overline{A_1} = \overline{E_1 \cap E_2 \cap E_3} = \overline{E_1} \cup \overline{E_2} \cup \overline{E_3}.$$

Saman asian voi toki päätellä myös maalaisjärjellä, sillä A:sta ei virtaa sähköä B:hen täsmälleen silloin, kun ainakin yksi kytkimistä K_i on auki.

Oikeapuoleiselle piirille taasen

$$A_1 = ((E_1 \cap E_2) \cup (E_3 \cap E_4)) \cap E_5,$$

joten De Morganin kaavoista seuraa

$$A_2 = \overline{A_1} = \overline{((E_1 \cap E_2) \cup (E_3 \cap E_4)) \cap E_5} = \left(\left(\overline{E_1} \cup \overline{E_2}\right) \cap \left(\overline{E_3} \cup \overline{E_4}\right)\right) \cup \overline{E_5}.$$

b) Tietyllä hetkellä jokainen kytkin on kiinni todennäköisyydellä $\frac{1}{2}$. Millä todennäköisyydellä virta kulkee A:sta B:hen kyseisellä hetkellä?

Ratkaisu: Oletetaan, että kytkinten toiminta on toisistaan riippumatonta, sillä muutoin emme osaa laskea todennäköisyyttä ilman lisäinformaatiota. Kysytään a)-kohdan tapahtuman A_1 todennäköisyyttä. Edellisen kohdan perusteella vasemmanpuoleiselle piirille

$$P(A_1) = P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1)P(E_2)P(E_3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

Käytetään oikeanpuoleiselle piirille ensin osittelulakia

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

josta seuraa

$$\begin{aligned} P(A_1) &= P(E_1 \cap E_2 \cap E_5) + P(E_3 \cap E_4 \cap E_5) - P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4 \cap E_5) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{7}{32}. \end{aligned}$$

Edellä käytettiin kaavaa $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ja tapahtumien E_i riippumattomuutta.

2. Tarkastellaan satunnaiskoetta, jossa metallilevystä otetaan kolme näytettä, joille tehdään rasitustesti, ja meitä kiinnostaa läpäiseekö näyte rasitustestin vai ei.

   a) Määrää satunnaiskokeelle sopiva otosavaruus ja piirrä satunnaiskoetta havainnollistava puukaavio.

   b) Tarkastellaan tapahtumia

$$A = \text{"vähintään 2 näytettä läpäisee rasitustestin"}$$
$$B = \text{"korkeintaan 2 näytettä läpäisee rasitustestin"}.$$

   Ilmaise joukko-opillisesti tapahtumat A ja B.

   c) Olkoon p todennäköisyys sille, että näyte läpäisee rasitustestin. Laske tapahtumien A, B, $A \cap B$, $A \cup B$ ja $A \setminus B$ todennäköisyys, kun oletetaan, että näytteet ovat toisistaan riippumattomia.

Ratkaisu: a) Merkitään

$$L = \text{"näyte läpäisee rasitustestin"},$$
$$E = \text{"näyte ei läpäise rasitustestiä"},$$

jolloin otosavaruudeksi S voidaan ottaa merkkien L ja E muodostamat kolmen merkin merkkijonot. Koska kukin näyte joko läpäisee tai ei läpäise rasitustestiä, joten otosavaruuden S alkioiden lukumäärä on $\#S = 2^3 = 8$. Otosavaruus on

$$S = \{LLL, LLE, LEL, ELL, LEE, ELE, EEL, EEE\}.$$

Tilannetta havainnollistava puukaavio on tehtävän ratkaisun lopussa.

b) Edellisen kohdan perusteella suotuisia alkeistapahtumia tapahtumalle A ovat LLL, LLE, LEL ja ELL, joten

$$A = \{LLL, LLE, LEL, ELL\}.$$

Vastaavalla päättelyllä joukoksi B saadaan

$$B = \{EEE, EEL, ELE, LEE, ELL, LEL, LLE\}.$$

c) Edellisestä kohdasta saadaan

$$P(A) = p \cdot p \cdot p + p \cdot p \cdot (1-p) + p \cdot (1-p) \cdot p + (1-p) \cdot p \cdot p = p^3 + 3p^2(1-p) = p^2(3-2p)$$

ja

$$P(B) = (1-p)^3 + 3(1-p)^2 p + 3p^2(1-p) = (1-p)(1+p+p^2).$$

näytteiden riippumattomuuden nojalla.

Joukko $A \cap B$ tarkoittaa, että täsmälleen 2 näytettä läpäisee testin, joten

$$A \cap B = \{LLE, LEL, ELL\}.$$

Todennäköisyydeksi saadaan

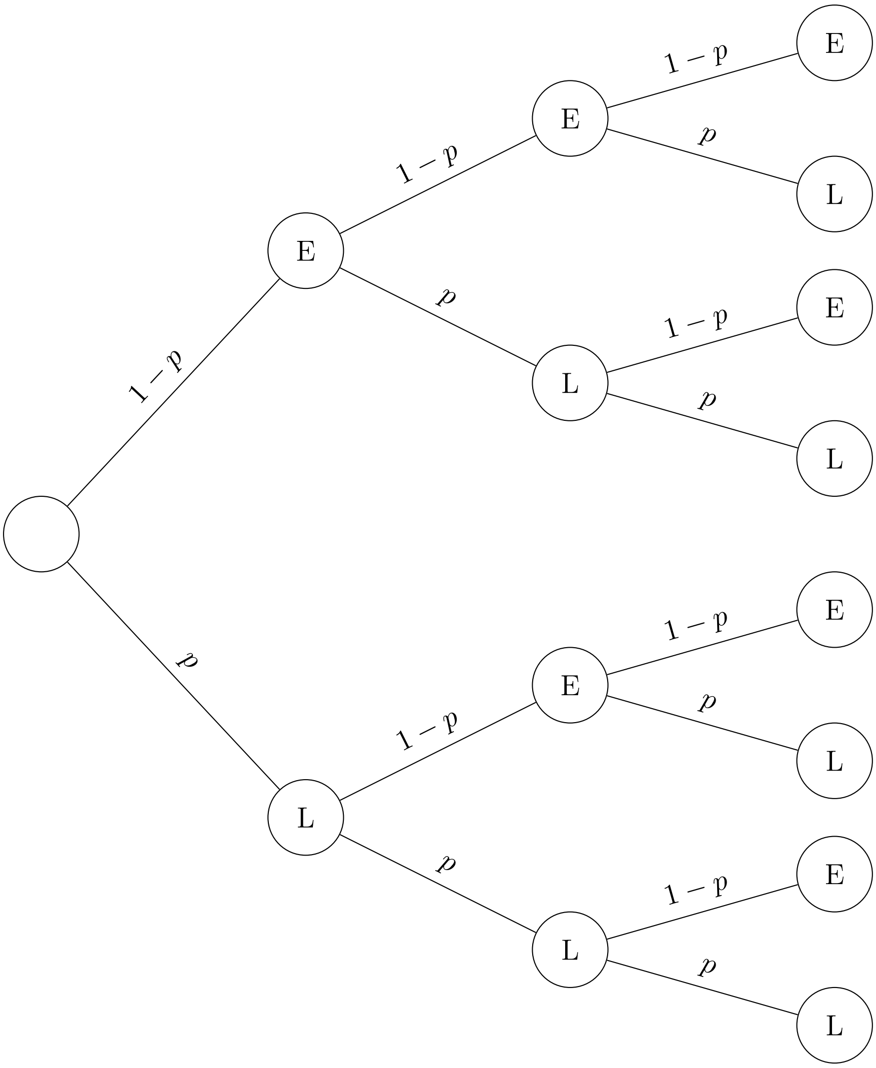
$$P(A \cap B) = 3p^2(1-p).$$

Joukon $A \cup B$ todennäköisyys on edellä lasketun mukaan

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = p^3 + (1-p)^3 + 3(1-p)^2 p + 3p^2(1-p),$$

joka voidaan sieventää muotoon

$$P(A \cup B) = 1,$$



Kuva 2: Tehtävän 2 puukaavio

sillä kaikki alkeistapahtumat ovat $A \cup B$:lle suotuisia.
Joukon $A \setminus B$ todennköisyydeksi saadaan

$$P(A \setminus B) = P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = p^2(3 - 2p) - 3p^2(1 - p),$$

joka voidaan sieventää muotoon

$$P(A \setminus B) = p^3,$$

sillä itse asiassa alkeistapahtuma LLL on ainoa joukon alkio.

3. Oletetaan, että 100 satunnaisesti valitun teekkarin joukossa 54 opiskelee fysiikkaa, 69 opiskelee matematiikkaa sekä 35 opiskelee matematiikka ja fysiikkaa. Merkitse seuraavat tapahtumat joukko-opillisesti ja määrää todennäköisyys, että opiskelija

   a) opiskelee matematiikkaa tai fysiikkaa.

   b) ei opiskele kumpaakaan näistä aineista.

   c) opiskelee matematiikkaa, muttei fysiikkaa.

Ratkaisu: Merkitään tapahtumat A="teekkari opiskelee fysiikkaa" ja B="teekkari opiskelee matematiikkaa". Otosavaruus S sisältää 100 teekkaria ($\#S = 100$) ja heistä 54 opiskelee fysiikkaa ($\#A = 54$), joten satunnaisesti valittu teekkari opiskelee fysiikkaa todennäköisyydellä $P(A) = 54/100 = 0,54$. Vastaavasti matematiikan osalta $\#B = 69$ ja $P(B) = 69/100 = 0,69$. Molempia opiskelee 35 ($\#(A \cap B) = 35$).

a) "opiskelee matematiikkaa tai fysiikkaa": $A \cup B$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,54 + 0,69 - 0,35 = 0,88 = 88\%$$

b) "ei opiskele kumpaakaan": $\overline{A \cup B}$.

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,88 = 0,12 = 12\%$$

c) "opiskelee matematiikkaa, muttei fysiikkaa": $B \cap \overline{A} = B \setminus (A \cap B)$

$$P(B \cap \overline{A}) = \frac{69 - 35}{100} = \frac{34}{100} = 0,34 = 34\%$$

4. Olkoot A ja B tapahtumia, joille $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.5$ ja $P(A \cap B) = 0.24$.

a) Laske todennäköisyydet $P(A \cup B), P(\overline{A} \cup B), P(A \setminus B)$ ja $P(\overline{A} \cup \overline{B})$.

b) Ovatko tapahtumat A ja B riippumattomia? Entäpä A ja $\overline{B}$?

Ratkaisu: Käytetään hyväksi kaavakokoelmasta löytyviä todennäköisyyden peruskaavoja. Joukkoja kannattaa havainnollistaa myös Vennin diagrammien avulla.

a) Kaavasta

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{1}$$

saadaan

$$P(A \cup B) = 0.3 + 0.5 - 0.24 = 0.56.$$

Sijoittamalla kaavaan (1) A:n paikalle $\overline{A}$ saadaan

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cup B) &= P(\overline{A}) + P(B) - P(\overline{A} \cap B) = 1 - P(A) + P(B) - (P(B) - P(A \cap B)) \\ &= 1 - P(A) + P(A \cap B) \\ &= 0.7 + 0.24 = 0.94. \end{aligned}$$

Joukkoerotuksen $A \setminus B$ todennäköisyydeksi saadaan

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) = 0.06.$$

De Morganin kaavalla saadaan

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}) = 1 - P(A \cap B) = 0.76.$$

b) Tapahtumat A ja B eivät ole riippumattomia, sillä

$$P(A \cap B) = 0.24 \neq 0.15 = 0.3 \cdot 0.5 = P(A)P(B).$$

Myöskään A ja $\overline{B}$ eivät ole riippumattomia, sillä

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A)P(\overline{B}) \Leftrightarrow P(A) - P(A \cap B) = P(A)(1 - P(B)) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Sama asia voidaan toki todeta myös laskemalla

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0.06$$

ja

$$P(A)P(\overline{B}) = 0.3 \cdot 0.5 = 0.15.$$

5. Roger Federer ja Rafael Nadal pelaavat tennisottelun paras kolmesta systeemillä, eli voittaja on se pelaaja, joka voittaa 2 erää. Oletetaan, että Nadal voittaa yksittäisen erän muiden erien tuloksista riippumatta todennäköisyydellä $\frac{2}{3}$. Tarkastellaan tapahtumia

$$\begin{aligned} A &= \text{"Nadal voittaa ensimmäisen erän"}, \\ B &= \text{"Nadal voittaa ottelun"}. \end{aligned}$$

a) Laske todennäköisyydet $P(\overline{B}|A), P(B|A)$ ja $P(B|\overline{A})$.

b) Millä todennäköisyydellä Nadal voittaa ottelun?

c) Laske todennäköisyydet $P(A|B)$ ja $P(A|\overline{B})$.

Ratkaisu:

a) Todennäköisyys voidaan laskea joko käyttämällä ehdollisen todennäköisyyden määritelmää tai päätellä suoraan. Todennäköisyys $P(\overline{B}|A)$ tarkoittaa, että Federerin on voitettava kaksi viimeistä erää. Näin ollen $P(\overline{B}|A) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$.
Koska $P(\cdot|A)$ on todennäköisyys A:ssa, niin $P(B|A) = 1 - P(\overline{B}|A) = \frac{8}{9}$. Tämä voidaan laskea myös päättelemällä mahdolliset alkeistapahtumat. Nyt kysytty todennäköisyys koostuu kahdesta erillisestä tapahtumasta "Nadal voittaa toisen erän", jolloin ottelu päättyy suoraan kahdessa erässä, ja "Nadal häviää toisen, mutta voittaa kolmannen erän". Sama asia voidaan vääntää joukko-opin kielelle seuraavasti. Olkoon A_i = "Nadal voittaa erän i". Tällöin

$$P(B|A) = P(A_2 \cup (\overline{A_2} \cap A_3)) = P(A_2) + P(\overline{A_2} \cap A_3) = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} = \frac{8}{9}.$$

Todennäköisyys $P(B|\overline{A})$ tarkoittaa, että Nadalin on vietävä kaksi viimeistä erää, joten todennäköisyys on $P(B|\overline{A}) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$. Huomaa, että $P(B|\overline{A}) \neq 1 - P(B|A)$.

b) Käytetään kokonaistodennäköisyyden kaavaa. Tapahtuma B koostuu kahdesta erillisestä tapahtumasta $B \cap A$ ja $B \cap \overline{A}$, joten kokonaitodennäköisyyden kaavan mukaan

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) = P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A}).$$

Koska kaikki on laskettu a)-kohdassa, saadaan

$$P(B) = \frac{8}{9} \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{20}{27} \approx 74\%.$$

c) Näiden todennäköisyyksien laskeminen ei onnistu yhtä helposti kuin edellä. Hahmottamisessa voi käyttää edellä laskettujen todennäköisyyksien määräämää puukaaviota. Vähemmällä päästään, kun hyödynnetään tärkeää Bayesin kaavaa

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{8}{9} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{20}{27}} = \frac{4}{5}.$$

Vastaavasti Bayesin kaavalla

$$P(A|\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(\overline{B}|A)P(A)}{P(\overline{B})} = \frac{2}{7}.$$

6. Pumpun venttiilin toimintaa valvotaan automaattisella hälytysjärjestelmällä. Todennäköisyys sille, että järjestelmä hälyttää, kun venttiili ei toimi, on 0.98. Todennäköisyys sille, että järjestelmä ei hälytä, kun venttiili toimii, on 0.985. Todennäköisyys sille, että venttiili ei toimi, on 0.00001. Määrää todennäköisyys sille, että venttiili ei toimi, kun järjestelmä hälyttää.

Ratkaisu:
Merkitään

$$\begin{aligned} H &= \text{"järjestelmä hälyttää"}, \\ V &= \text{"venttiili toimii"}. \end{aligned}$$

Tiedetään todennäköisyydet $P(H|\overline{V}) = 0.98$, $P(\overline{H}|V) = 0.985$ ja $P(\overline{V}) = 0.00001$. Kysytään todennäköisyyttä

$$P(\overline{V}|H) = \frac{P(\overline{V} \cap H)}{P(H)}.$$

Lasketaan ensin todennäköisyys, että järjestelmä hälyttää. Kokonaistodennäköisyyden kaavan mukaan

$$\begin{aligned} P(H) = P(H|V)P(V) + P(H|\overline{V})P(\overline{V}) &= (1 - P(\overline{H}|V))P(V) + P(H|\overline{V})P(\overline{V}) \\ &= 0.015 \cdot 0.99999 + 0.98 \cdot 0.00001 \approx 0.015. \end{aligned}$$

Kysytty todennäköisyys saadaan Bayesin kaavalla

$$P(\overline{V}|H) = \frac{P(H|\overline{V})P(\overline{V})}{P(H)} \approx 6.53 \cdot 10^{-4}.$$

Todennäköisyyttä kannattaa havainnollistaa myös puukaavion avulla. Tulos voi tuntua yllättävältä, vaikka järjestelmä toimii todennäköisyyksien mielessä kohtuullisen hyvin.

7. Kylän asukkaista 5 % edustaa erilaisia etnisiä vähemmistöjä, muut ovat valtaväestöstä. Ennakkoluuloinen kun on, kylän poliisi uskoo, että vähemmistöryhmiin kuuluvan todennäköisyys varastaa on viisinkertainen verrattuna valtaväestön jäsenen todennäköisyyteen varastaa. Eräänä aamuna kylän poliisille ilmoitetaan varkaudesta paikalliseen kyläkauppaan, jolloin hän ryhtyy epäilemään, että varas kuuluu vähemmistöön. Kommentoi hänen epäilynsä oikeutusta, kun olet laskenut todennäköisyyden, että varas kuuluu valtaväestöön.

Ratkaisu: Merkitään

$$\begin{aligned} A &= \text{"henkilö kuuluu valtaväestöön"}, \\ B &= \text{"henkilö kuuluu vähemmistöön"} = \overline{A}, \\ V &= \text{"henkilö varastaa"}. \end{aligned}$$

Tiedetään todennäköisyydet

$$P(A) = 0.95, \quad P(B) = 0.05, \quad P(V|A) \overset{\text{merk.}}{=} p > 0, \quad P(V|B) = P(V|\overline{A}) = 5p.$$

Kysytään ehdollista todennäköisyyttä $P(A|V)$. Käytetään Bayesin kaavaa

$$P(A|V) = \frac{P(V|A)P(A)}{P(V|A)P(A) + P(V|\overline{A})P(\overline{A})} = \frac{0.95p}{0.95p + 0.25p} \approx 0.79 = 79\%.$$

Tässäkin todennäköisyyttä kannattanee havainnollistaa myös puukaavion avulla.

8. Erästä tietoliikennelinjaa pitkin pystyttiin lähettämään kahta erilaista merkkijonoa: 000 ja 111. Tiedettiin, että jonon 000 lähettämistodennäköisyys oli 0.3. Häiriöiden vuoksi kummankin jonon yksittäinen bitti vastaanotetaan oikein todennäköisyydellä 0.6. Lisäksi tiedetään, että bitit siirtyvät linjalla toisistaan riippumattomasti. Kumpi on todennäköisemmin lähetetty merkkijono, jos vastaanotetaan merkkijono 010?

Ratkaisu: Merkitään

$$\begin{aligned} L &= \text{"lähetetään 000"}, \\ V &= \text{"vastaanotaan 010"}, \\ A_i &= \text{"}i\text{:s bitti säilyy samana"}, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Lasketaan todennäköisyys

$$P(L|V) \overset{\text{Bayes}}{=} \frac{P(V|L)P(L)}{P(V)}.$$

Kokonaistodennäköisyyden kaavan mukaan

$$\begin{aligned} P(V) &= P(V|L)P(L) + P(V|\overline{L})P(\overline{L}) = P(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3)P(L) + P(\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3})P(\overline{L}) \\ &= 0.6 \cdot 0.4 \cdot 0.6 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.6 \cdot 0.4 \cdot 0.7 \\ &= 0.1104. \end{aligned}$$

Näin ollen

$$P(L|V) = \frac{0.6 \cdot 0.4 \cdot 0.6 \cdot 0.3}{0.1104} \approx 39\%,$$

eli todennäköisemmin lähetettiin 111.

9. Tunnetusti geneettinen perimä vaikuttaa useisiin sairauksiin, joten on tärkeää pystyä ennustamaan lasten riskiä saada sairautta aiheuttava perimä. Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että sairautta voidaan ennustaa yhden geeniparin avulla, jossa toinen geeni periytyy äidiltä ja toinen isältä. Geenillä on 2 muotoa: A, joka on dominoiva, ja a, joka on resessiivinen.

   Oletetaan, että henkilöllä on riski sairastua tautiin vain, jos geeniperimä on aa, ja että kaikki geeniparit ovat yhtä todennäköisiä. Oletetaan, että perheen isällä on taudin aiheuttava geneettinen riski ja että perheen äidillä ei ole riskiä. Jos perheeseen syntyy kaksi lasta, niin millä todennäköisyydellä

   a) kummallakaan lapsella ei ole riskiä sairastua tautiin, jos äidillä on AA?

   b) kummallakaan lapsella ei ole riskiä sairastua tautiin?

   c) äidillä on AA, jos kummallakaan lapsella ei ole riskiä sairastua tautiin?

Ratkaisu: Käytetään hieman epätäsmällisiä merkintöjä, mutta joista toivottavasti hahmottuu hyvin, mistä on kyse. Tiedetään, että isän perimä on aa ja että äidin perimä on jokin vaihtoehdoista aA, Aa tai AA. Merkitään Ä_{xy}, jos äidin perimä on xy, ja

$$E = \text{"äidillä ei ole riskiä sairastua tautiin"}.$$

Koska tiedetään, että E sattuu ja että kaikki geenivaihtoehdot ovat yhtä todennäköisiä, niin

$$P_E(\text{Ä}_{AA}) = P(\text{Ä}_{AA}|E) = \frac{P(\text{Ä}_{AA} \cap E)}{P(E)} = \frac{1/4}{3/4} = 1/3,$$

missä alaindeksi E tarkoittaa, että todennäköisyys lasketaan tapahtuman E suhteen. Ilman alaindeksiä varustettu P tarkoittaa, että todennäköisyysfunktio on määritelty kaikkien perimävaihtoehtojen joukossa.
Vastaavasti saadaan

$$P_E(\text{Ä}_{Aa}) = P_E(\text{Ä}_{aA}) = \frac{1}{3}.$$

Lapsen perimän hahmottamiseksi kannattaa laatia perimätaulukko

Äiti\Isä	a	a
A	Aa	Aa
a	aa	aa

josta näkyy, että todennäköisyys sille, että lapsella ei ole riskiä sairastua tautiin, on 1/2, kun tiedetään, että äidin perimä on Aa (lapsi saa molemmilta vanhemmiltaan yhden geenin, jotka muodostavat lapsen geeniparin). Jos merkitään

$$R = \text{"lapsella ei ole riskiä sairastua tautiin"},$$

niin esimerkiksi

$$P_E(R|\text{Ä}_{Aa}) = \frac{1}{2}.$$

Vastaavalla tavalla voidaan päätellä

$$P_E(R|\text{Ä}_{AA}) = 1 \quad \text{ja} \quad P_E(R|\text{Ä}_{aA}) = \frac{1}{2}.$$

Käytetään tapahtumalle "kummallakaan lapsella ei ole riskiä sairastua tautiin" merkintää RR.

a) Kysytään todennäköisyyttä $P_E(RR|\text{Ä}_{AA})$. Yllä olevan perusteella

$$P_E(RR|\text{Ä}_{AA}) = 1,$$

   sillä äidiltä tulee varmasti geeni A, joka takaa sen, ettei sairastumismahdollisuutta ole kummallakaan lapsella.

b) Kysytään todennäköisyyttä $P_E(RR)$. Kokonaistodennäköisyyden mukaan

$$\begin{aligned}P_E(RR) &= P_E(RR|\text{Ä}_{AA})P_E(\text{Ä}_{AA}) + P_E(RR|\text{Ä}_{Aa})P_E(\text{Ä}_{Aa}) + P_E(RR|\text{Ä}_{aA})P_E(\text{Ä}_{aA}) \\ &= 1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

c) Kysytään todennäköisyyttä $P_E(\text{Ä}_{AA}|RR)$. Bayesin kaavan mukaan

$$P_E(\text{Ä}_{AA}|RR) = \frac{P_E(\text{Ä}_{AA} \cap RR)}{P_E(RR)} = \frac{P_E(\text{Ä}_{AA})}{P_E(RR)} \overset{\text{b)}}{=} \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}.$$

Todennäköisyyksiä kannattaa hahmotella myös puukaavion avulla.
Tässä tehtävässä alaindeksi E saattaa sekottaa merkinnällisesti, mutta hyvä puoli on siinä, että tulee myös merkinnällä kerrottua mikä on otosavaruus, jossa todennäköisyys lasketaan. Todennäköisyys riippuu aina valitusta otosavaruudesta, joten epäselvissä tapauksissa otosavaruus on syytä täsmentää.