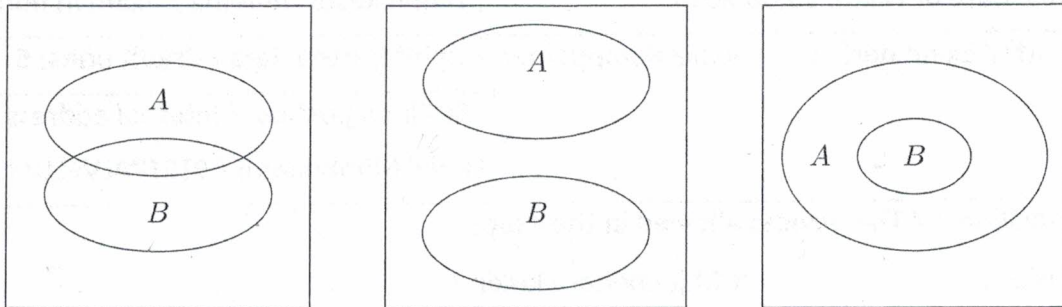


Tilastomatematiikka

Loppukoe 15.03.2018

1. Kuvaan 1 piirretyissä Vennin diagrammeissa suorakaide kuvastaa otosavaruutta S ja ellipsit joukkoja A ja B .
- a) Anna esimerkki diagrammeihin sopivista tapahtumista A ja B ja määrää niiden todennäköisyydet. (4p)
- b) Ovatko a)-kohdassa vasemmanpuoleiseen kuvaan antamasi tapahtumat riippumattomia? (2p)



Kuva 1: Vennin diagrammeja

2. Olkoon X normaalijakautunut satunnaismuuttuja parametreilla $\mu = 100$ ja $\sigma = 5$. Määrää sellainen luku x , jonka määrää ehto
- a) $P(90 \leq X \leq 110) = x$.
- b) $P(X \geq x) = 0,05$.
- c) $P(X \leq 100 | X \leq 110) = x$.
3. Tutkittiin, onko kolikko reilu. Sitä varten kolikkoa heitettiin 200 kertaa, joista kruunia oli 118. Aseta tilanteeseen sopivat hypoteesit ja testaa ne luottamustasolla 95%.
4. Tutkittiin erään kemiallisen yhdisteen liukenemista veteen. Taulukkoon on koottu liuenneen aineen määrä y [g] eri lämpötiloissa x [$^{\circ}C$].

x	0	15	30	45	60	75
y	8	12	25	31	44	48

- a) Laske havaintoja vastaava regressiosuora ja määrää lineaarisen mallin selitysaste.
- b) Piirrä havaintoja vastaava sirontakuviio ja regressiosuora samaan koordinaatistoon.
- c) Laske $ss_R = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$. Mikä on mallin antama ennuste, kun lämpötila on $30^{\circ}C$?

5. Muuttujien X ja Y yhteisjakauman pistetodennäköisyydet ovat

$X \setminus Y$	0	1	2
0	0	1/9	2/9
1	1/9	2/9	1/3

- a) Määrää muuttujien X ja Y kovarianssi. (4p)
- b) Ovatko muuttujat riippumattomia? (2p)

Kaavoja

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \setminus B) = P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$$

$$f(x) = 1/(b-a), \quad E(X) = (a+b)/2, \quad \text{Var}(X) = (b-a)^2/12$$

$$f(x) = \theta e^{-\theta x}, \quad E(X) = 1/\theta, \quad \text{Var}(X) = 1/\theta^2$$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad E(X) = np, \quad \text{Var}(X) = np(1-p)$$

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad E(X) = 1/p, \quad \text{Var}(X) = (1-p)/p^2$$

$$P(X = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \quad E(X) = a, \quad \text{Var}(X) = a$$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1) \text{ (likimain, kun "n on suuri")}$$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} \sqrt{\frac{(n-1)S_x^2 + (m-1)S_y^2}{n+m-2}}} \sim t_{n+m-2};$$

$$r = \frac{s_{xy}}{\sqrt{s_{xx} s_{yy}}}; \quad s_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}); \quad s_{xx} = s_x^2;$$

$$y = a + bx; \quad b = \frac{s_{xy}}{s_{xx}}; \quad a = \bar{y} - b\bar{x}$$

$$s_r^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2 = \frac{n-1}{n-2} (1-r^2) s_{yy}$$

$$\sqrt{n-1} s_x \frac{\frac{s_{xy}}{s_{xx}} - \beta}{S_r} \sim t_{n-2};$$

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y); \quad \text{Var}(X) = E((X - E(X))^2);$$

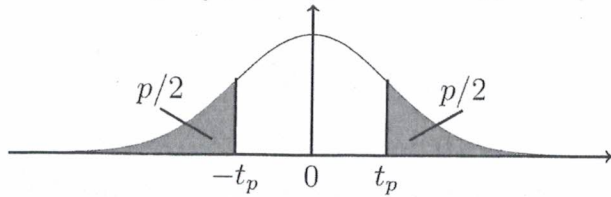
$$\sigma_{XY} = \text{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))), \quad \sigma_{XX} = \sigma_X^2;$$

$$= E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$\rho(X, Y) = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}.$$

Studentin t-jakauma

Kriittisiä arvoja t_p joillakin merkitsevyystasojen p ja vapausasteiden f arvoilla.



Esim. kaksisuuntainen testi
merkitsevyystasolla p .

f	merkitsevyystaso p yksisuuntaisessa testissä					
	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
	merkitsevyystaso p kaksisuuntaisessa testissä					
	0.10	0.05	0.02	0.01	0.002	0.001
1	6.314	12.706	31.821	63.657	318.309	636.619
2	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.599
3	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924
4	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
24	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
50	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261	3.496
60	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
80	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195	3.416
100	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174	3.390
200	1.653	1.972	2.345	2.601	3.131	3.340
500	1.648	1.965	2.334	2.586	3.107	3.310
∞	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291