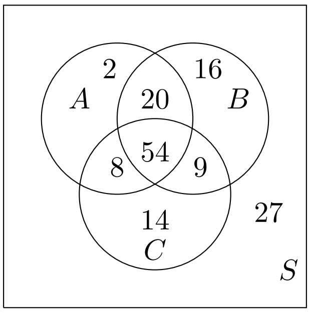
Tilastomatematiikka

Loppukoe 16.03.2017

1. Kuvassa 1 suorakaide kuvastaa otosavaruutta S ja ympyrät joukkoja A, B ja C. Otosavaruus koostuu 150 opiskelijasta. Kuhunkin otosavaruuden osaan kuuluvien opiskelijoiden lukumäärä on merkitty näkyviin. Millä todennäköisyydellä opiskelija kuuluu seuraaviin joukkoihin:
$$A,\ \overline{C},\ A \cup B,\ B \cap C,\ B \setminus A, \text{ ja } A \cup B \cup C?$$



Kuva 1: Otosavaruus S ja sen osajoukot

2. Määrää kolmen desimaalin tarkkuudella sellainen luku x, että
   a) $P(|X| \leq x) = 0.97$, kun $X \sim N(0, 1)$.
   b) $P(X \geq x) = 0.975$, kun $X \sim t_{25}$.
   c) $P(X \leq x) = 0.95$, kun $f_X(t) = \mathrm{e}^{-t}$ kaikilla $t > 0$.

3. Oletetaan, että huippuhiihtäjien hemoglobiinitaso on normaalijakautunut satunnaismuuttuja $X \sim N(150, 225)$. Hiihtäjä voi osallistua kilpailuun vain, jos hemoglobiinitaso ei ylitä rajaa 170. Ennen kilpailua hemoglobiinitaso testataan 40 satunnaisesti valitulta urheilijalta. Osoittautuu, että 14 urheilijalla taso 170 ylittyy.
   a) Millä todennäköisyydellä 14 urheilijalla on liian korkea hemoglobiinitaso?
   b) Laske normaalijakauma-approksimaatiolla arvio a)-kohdan todennäköisyydelle. Käytä jatkuvuuskorjausta.

4. Tutkittiin vesimäärän x vaikutusta viljasatoon y ja saatiin seuraava havaintoaineisto

x	0.15	0.25	0.40	0.50	0.65	0.75
y	4.0	3.7	4.7	4.6	5.2	5.3

   a) Laske havaintoja vastaava regressiosuora ja määrää lineaarisen mallin selitysaste. (2p)
   b) Muodostetaan regressiomalli
$$Y_i = \alpha + \beta x_i + \epsilon_i$$
   muuttujien välille. Laske kulmakertoimen β symmetrinen 95% luottamusväli. (4p)

5. Olkoot X ja Y satunnaismuuttujia, joille $\sigma_X = 2$, $\sigma_Y = 3$ ja $\rho(X, Y) = -\frac{3}{4}$.
   a) Määrää satunnaisvektorin (X, Y) kovarianssimatriisi.
   b) Laske muuttujan $3X - 2Y$ odotusarvo ja varianssi, kun $\mu_X = \mu_Y = 1$.

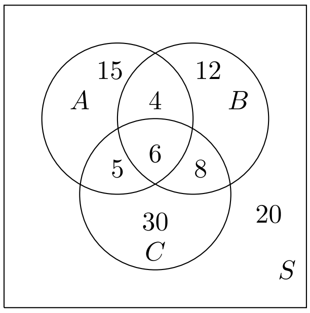
Kaavoja

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$$
$$\mathrm{P}(A \backslash B) = \mathrm{P}(A \cap \bar{B}) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B)$$
$$\mathrm{P}(\bar{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$$
$$\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A \cap B)/\mathrm{P}(B)$$
$$f(x) = 1/(b-a),\ \mathrm{E}(X) = (a+b)/2,\ \mathrm{Var}(X) = (b-a)^2/12$$
$$f(x) = \theta e^{-\theta x},\ \mathrm{E}(X) = 1/\theta,\ \mathrm{Var}(X) = 1/\theta^2$$
$$\mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ \mathrm{E}(X) = np,\ \mathrm{Var}(X) = np(1-p)$$
$$\mathrm{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1},\ \mathrm{E}(X) = 1/p,\ \mathrm{Var}(X) = (1-p)/p^2$$
$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a},\ \mathrm{E}(X) = a,\ \mathrm{Var}(X) = a$$
$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \text{ (likimain, kun "n on suuri")}$$
$$\frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$
$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}\sqrt{\frac{(n-1)S_x^2 + (m-1)S_y^2}{n+m-2}}} \sim t_{n+m-2};$$
$$r = \frac{s_{xy}}{\sqrt{s_{xx}}\sqrt{s_{yy}}};\ s_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y});\ s_{xx} = s_x^2;$$
$$y = a + bx; \quad b = \frac{s_{xy}}{s_{xx}}; \quad a = \overline{y} - b\overline{x}$$
$$s_r^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)^2; \quad \sqrt{n-1}\, s_x \frac{\frac{S_{xy}}{s_{xx}} - \beta}{S_r} \sim t_{n-2};$$
$$\mathrm{E}(aX + bY) = a\mathrm{E}(X) + b\mathrm{E}(Y); \quad \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}((X - \mathrm{E}(X))^2);$$
$$\sigma_{XY} = \mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}((X - \mathrm{E}(X))(Y - \mathrm{E}(Y))), \quad \sigma_{XX} = \sigma_X^2;$$
$$\rho(X,Y) = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}.$$

Probability and Mathematical Statistics

Final exam 11.04.2017

1. Let S be a sample space consisting of 150 students, which is illustrated in Kuva 1 as the rectangle. The sets A, B and C are illustrated as circles. The number of students belonging to each subgroup of S are given in Kuva 1. What is the probability that a randomly chosen student belongs to the following sets:
$$A,\ \overline{A \cup B},\ A \cap C,\ \overline{A} \cap \overline{B},\ B \setminus \overline{A} \text{ and } A \cap B \cap \overline{C}?$$



Kuva 1: The sample space S and its subsets

2. Mighty Machines Inc. has developed electronical devices each operating with probability 95% independently of each others. The devices will be shipped in boxes consisting of 400 devices.
   a) What is the probability that in a randomly chosen box at least 375 devices operate?
   b) The company gives a guarantee that in each box at least k devices operate. What is the largest k such that the guarantee is fulfilled with probability greater than 95%?

   Use the normal approximation with the continuity correction in both cases.

3. Let us consider the hypothesis testing for a parameter θ of some random variable.
   a) What form are the hypotheses to be tested? What kind errors the test can contain?
   b) Determine the proper test variable, when the tested parameter θ is
      (i)the expectation and the population variance is unknown?
      (ii)the relative proportion?
      (iii)the slope of the regression model?

4. The oxygen content of a reservoir P [mg/l] depends on the temperature T [$°C$] of the reservoir according to the equation
$$P = a\mathrm{e}^{-bT}.$$
   To estimate the parameters a and b, the oxygen content of the reservoir was measured at different temperatures and the following data was obtained:

T	23.1	24.4	25.0	26.5	27.1	28.0
P	4.7	3.2	3.2	2.8	2.8	2.5

   a) Determine the regression line $\ln P = \ln a - bT$ between the temperature and the logarithm of the oxygen content.
   b) What is the coefficient of the determination of the model?
   c) What is the oxygen content at $30°C$ given by the model?

5. Let us flip a coin twice. Let X be the number of heads in the first flip and Y be the number of heads in both flips.
   a) Determine the probabilities for the joint distribution of X and Y.
   b) Calculate the covariance of X and Y. Are X and Y independent?

Formulae

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$$
$$\mathrm{P}(A \backslash B) = \mathrm{P}(A \cap \bar{B}) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B)$$
$$\mathrm{P}(\bar{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$$
$$\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A \cap B)/\mathrm{P}(B)$$
$$f(x) = 1/(b-a),\ \mathrm{E}(X) = (a+b)/2,\ \mathrm{Var}(X) = (b-a)^2/12$$
$$f(x) = \theta e^{-\theta x},\ \mathrm{E}(X) = 1/\theta,\ \mathrm{Var}(X) = 1/\theta^2$$
$$\mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ \mathrm{E}(X) = np,\ \mathrm{Var}(X) = np(1-p)$$
$$\mathrm{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1},\ \mathrm{E}(X) = 1/p,\ \mathrm{Var}(X) = (1-p)/p^2$$
$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a},\ \mathrm{E}(X) = a,\ \mathrm{Var}(X) = a$$
$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \text{ (approximately, when 'n is big')}$$
$$\frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$
$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} \sqrt{\frac{(n-1)S_x^2 + (m-1)S_y^2}{n+m-2}}} \sim t_{n+m-2};$$
$$r = \frac{s_{xy}}{\sqrt{s_{xx}}\sqrt{s_{yy}}};\ s_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y});\ s_{xx} = s_x^2;$$
$$y = a + bx; \quad b = \frac{s_{xy}}{s_{xx}}; \quad a = \overline{y} - b\overline{x}$$
$$s_r^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2; \quad \sqrt{n-1}\, s_x \frac{\frac{S_{xy}}{s_{xx}} - \beta}{S_r} \sim t_{n-2};$$
$$\mathrm{E}(aX + bY) = a\mathrm{E}(X) + b\mathrm{E}(Y); \quad \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}((X - \mathrm{E}(X))^2);$$
$$\sigma_{XY} = \mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}((X - \mathrm{E}(X))(Y - \mathrm{E}(Y))), \quad \sigma_{XX} = \sigma_X^2;$$
$$\rho(X,Y) = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}.$$

Tilastomatematiikka

Loppukoe 07.09.2017

1. Oletetaan, että elektroni voi olla kolmella mahdollisella energiatilalla E_1, E_2 tai E_3 todennäköisyyksillä p_1, p_2 ja p_3, joille pätee $p_{i+1} = \frac{1}{2}p_i$, $i = 1, 2$.

   a) Laske todennäköisyydet p_1, p_2 ja p_3. (3p)

   b) Jos elektroni miehittää tilan E_1 ja yhdellä energiatilalla ei voi olla kuin yksi elektroni, niin millä todennäköisyydellä toinen elektroni miehittää tilan E_2? (2p)

   c) Olkoon A_i tapahtuma "energiatila i on miehitetty", $i = 1, 2$. Ovatko tapahtumat A_1 ja A_2 riippumattomia? (1p)

2. Lentoyhtiö tietää kokemuksesta, että keskimäärin 5 % paikan varanneista jää saapumatta koneeseen. Niinpä yhtiö myykin 184 lippua koneeseen, johon mahtuu 180 matkustajaa. Oletetaan, että paikan varaajat ovat toisistaan riippumattomia. Laske todennäköisyys, että jokainen lennolle todella saapuva saa paikan

   a) tarkasti. (2p)

   b) käyttämällä normaalijakauma-approksimaatiota jatkuvuuskorjauksella. (4p)

3. Eräs kalastustarvikevalmistaja väittää, että uuden kuitusiiman vetolujuus on keskimäärin 8.0 [kg] ja hajonta $\sigma = 0.5$ [kg]. Mitattiin 50 siiman vetolujuus ja keskimääräiseksi vetolujuudeksi saatiin 7.8 [kg]. Testaa riskitasolla 1%, voidaanko valmistajan ilmoittamaa vetolujuutta pitää oikeana.

4. Seuraavassa taulukossa on tietokoneen suorittamien tehtävien lukumääriä x ja niihin kuluneita (CPU) aikoja y.

x	1	2	3	4	5
y	2	5	4	9	10

   a) Määrää muuttujien x ja y välinen regressiosuora. (2p)

   b) Laske regressiosuoran kulmakertoimen 95% luottamusväli. (4p)

5. Olkoot X ja Y satunnaismuuttujia, joiden yhteisjakauman tiheysfunktio on

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-x-y}, & \text{kun } x, y > 0, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

   a) Laske muuttujien X ja Y välinen kovarianssi. Ovatko X ja Y riippumattomia? (4p)

   b) Mikä on muuttujien X ja Y odotusarvo? (2p)

Kaavoja

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$$
$$\mathrm{P}(A \backslash B) = \mathrm{P}(A \cap \bar{B}) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B)$$
$$\mathrm{P}(\bar{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$$
$$\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A \cap B)/\mathrm{P}(B)$$
$$f(x) = 1/(b-a),\ \mathrm{E}(X) = (a+b)/2,\ \mathrm{Var}(X) = (b-a)^2/12$$
$$f(x) = \theta e^{-\theta x},\ \mathrm{E}(X) = 1/\theta,\ \mathrm{Var}(X) = 1/\theta^2$$
$$\mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ \mathrm{E}(X) = np,\ \mathrm{Var}(X) = np(1-p)$$
$$\mathrm{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1},\ \mathrm{E}(X) = 1/p,\ \mathrm{Var}(X) = (1-p)/p^2$$
$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a},\ \mathrm{E}(X) = a,\ \mathrm{Var}(X) = a$$
$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \text{ (likimain, kun ”n on suuri”)}$$
$$\frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$
$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} \sqrt{\frac{(n-1)S_x^2 + (m-1)S_y^2}{n+m-2}}} \sim t_{n+m-2};$$
$$r = \frac{s_{xy}}{\sqrt{s_{xx}}\sqrt{s_{yy}}};\ s_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y});\ s_{xx} = s_x^2;$$
$$y = a + bx; \quad b = \frac{s_{xy}}{s_{xx}}; \quad a = \overline{y} - b\overline{x}$$
$$s_r^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)^2; \quad \sqrt{n-1}\, s_x \frac{\frac{S_{xy}}{s_{xx}} - \beta}{S_r} \sim t_{n-2};$$
$$\mathrm{E}(aX + bY) = a\mathrm{E}(X) + b\mathrm{E}(Y); \quad \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}((X - \mathrm{E}(X))^2);$$
$$\sigma_{XY} = \mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}((X - \mathrm{E}(X))(Y - \mathrm{E}(Y))), \quad \sigma_{XX} = \sigma_X^2;$$
$$\rho(X,Y) = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}.$$

Tilastomatematiikka

Loppukoe 2.11.2017

1. Perustele, voivatko seuraavat väitteet pitää paikkaansa.

   a) Todennäköisyys, että opiskelija saa tilastomatematiikan kurssista arvosanan 5 on 0.32. Todennäköisyys, että hän saa joko arvosanan 4 tai 5 on 0.27.

   b) Rakennusyhtiö tekee kaksi ostoskeskusta. Todennäköisyys, että suurempi valmistuu ajallaan, on 0.35. Todennäköisyys, että molemmat valmistuvat ajallaan, on 0.42.

   c) Todennäköisyys, että teekkari opiskelee fysiikkaa, on 0.5. Todennäköisyys, että teekkari opiskelee matematiikkaa ja fysiikkaa, on 0.4. Todennäköisyys, että teekkari opiskelee matematiikkaa, on 0.8, kun tiedetään, että hän opiskelee fysiikkaa.

2. Olkoot X ja Y riippumattomia satunnaismuuttujia, jotka noudattavat diskreettiä tasajakaumaa

Arvo	1	2	3	4
Todennäköisyys	0.25	0.25	0.25	0.25

   a) Laske muuttujien X ja Y kertymäfunktio. (2p)

   b) Määrää aritmeettisen keskiarvon $Z = \frac{1}{2}(X + Y)$ jakauma. (4p)

3. Jos sinun pitää testata hypoteesit $H_0 : \mu = \mu_0$ ja $H_1 : \mu > \mu_0$, niin

   a) mikä on sopiva testimuuttuja M, kun hajonta on tuntematon? (1p)

   b) Mikä on kynnysarvo c, jolle $P(M > c) = 0.05$, kun testataan 5 näytettä? (1p)

   c) Testaa annetut hypoteesit riskitasolla 5%, kun $\mu_0 = 1$ ja on saatu havainnot $1, 2, 3, 4, 5$. (4p)

4. Seuraavassa taulukossa x on teräsnäytettä venyttävä voima ja y on voiman aiheuttama venymä sopivissa yksiköissä.

x	1	2	3	4	5	6
y	14	33	40	63	76	85

   a) Määrää muuttujien x ja y välinen regressiosuora. (2p)

   b) Laske regressiosuoran kulmakertoimen 95% luottamusväli. (4p)

5. Olkoot X ja Y satunnaismuuttujia, joille $\sigma_X = 2$, $\sigma_Y = 1$ ja $\rho(X, Y) = -\frac{1}{2}$.

   a) Laske muuttujien X ja Y välinen kovarianssimatriisi. (2p)

   b) Ovatko X ja Y riippumattomia? (1p)

   c) Laske muuttujan $X - 2Y$ varianssi. (3p)

Kaavoja

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$$
$$\mathrm{P}(A \backslash B) = \mathrm{P}(A \cap \bar{B}) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B)$$
$$\mathrm{P}(\bar{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$$
$$\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A \cap B)/\mathrm{P}(B)$$
$$f(x) = 1/(b-a),\ \mathrm{E}(X) = (a+b)/2,\ \mathrm{Var}(X) = (b-a)^2/12$$
$$f(x) = \theta e^{-\theta x},\ \mathrm{E}(X) = 1/\theta,\ \mathrm{Var}(X) = 1/\theta^2$$
$$\mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ \mathrm{E}(X) = np,\ \mathrm{Var}(X) = np(1-p)$$
$$\mathrm{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1},\ \mathrm{E}(X) = 1/p,\ \mathrm{Var}(X) = (1-p)/p^2$$
$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a},\ \mathrm{E}(X) = a,\ \mathrm{Var}(X) = a$$
$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \text{ (likimain, kun ”n on suuri”)}$$
$$\frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$
$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} \sqrt{\frac{(n-1)S_x^2 + (m-1)S_y^2}{n+m-2}}} \sim t_{n+m-2};$$
$$r = \frac{s_{xy}}{\sqrt{s_{xx}}\sqrt{s_{yy}}};\ s_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y});\ s_{xx} = s_x^2;$$
$$y = a + bx; \quad b = \frac{s_{xy}}{s_{xx}}; \quad a = \overline{y} - b\overline{x}$$
$$s_r^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2; \quad \sqrt{n-1}\, s_x \frac{\frac{S_{xy}}{s_{xx}} - \beta}{S_r} \sim t_{n-2};$$
$$\mathrm{E}(aX + bY) = a\mathrm{E}(X) + b\mathrm{E}(Y); \quad \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}((X - \mathrm{E}(X))^2);$$
$$\sigma_{XY} = \mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}((X - \mathrm{E}(X))(Y - \mathrm{E}(Y))), \quad \sigma_{XX} = \sigma_X^2;$$
$$\rho(X,Y) = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}.$$