TILASTOMATEMATIIKKA

Harjoitus 6, kevät 2015

1. Lentoyhtiö tietää kokemuksesta, että keskimäärin 5 % paikan varanneista jää saapumatta koneeseen. Niinpä yhtiö myykin 184 lippua koneeseen, johon mahtuu 180 matkustajaa. Oletetaan, että paikan varaajat ovat toisistaan riippumattomia. Laske todennäköisyys, että jokainen lennolle todella saapuva saa paikan

   a) tarkasti.

   b) Poisson-jakauman avulla.

   c) käyttämällä normaalijakauma-approksimaatiota jatkuvuuskorjauksella ja ilman.

2. Fyysikot käyttävät satunnaiskävelyä diffuusion tai yleisesti partikkelien satunnaisliikkeen mallintamiseen. Partikkeli suorittaa siirtymiä ajanhetkillä $t = 1, 2, \ldots$ ja sen paikka S_n ajanhetkellä n voidaan ajatella olevan siirtymien $X_1, \ldots, X_n$ summa. Oletetaan, että siirtymät ovat riippumattomia ja samalla tavalla jakautuneita niin, että partikkeli voi samalla todennäköisyydellä joko pysyä paikallaan tai siirtyä yhden yksikön verran ($+1$) oikealle tai vasemmalle (-1). Määrää normaalijakauma-approksimaatiolla todennäköisyys, että 10000 siirtymän jälkeen partikkeli on vähintään 100 yksikköä lähtöpisteestä oikealle.

3. Olli Opiskelija on tyytymätön saamaansa opintotuen määrään (298 e) ja päättää rikastua lähtemällä kasinolle pelaamaan pelikassanaan koko opintotuki. Hän päättää pelata peliä, jossa asetettu panos maksetaan kaksinkertaisena ja panos palautetaan, jos pelaaja voittaa. Jos pelaaja häviää, menettää hän luonnollisesti panoksensa. Olli päättää pelata tätä peliä euron panoksella 298 kertaa. Olkoon yksittäisen pelin voittotodennäköisyys 1/4.

   a) Jos mitään ihmeitä ei ole tapahtunut, niin kuinka paljon köyhempi Olli on keskimäärin pelaamisensa jälkeen?

   b) Millä todennäköisyydellä hän ei häviä yhtään rahaa?

4. Satunnaislukugeneraattoreita voidaan käyttää integraalien laskemiseen. Sitä varten tarkastellaan esimerkkinä jatkuvaa funktiota $g : [0,1] \to [0,1]$. Olkoot X_i välillä [0,1] riippumattomia, tasajakautuneita satunnaismuuttujia, $X_i \sim \mathrm{Tas}(0,1)$. Määritellään sm. $Y_i = g(X_i)$.

   a) Totea, että Y_i:n odotusarvo on funktion g integraali yli välin [0,1], eli

   $$\mu = E(Y_i) = \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x.$$

   b) Olkoon $A_n = \frac{1}{n}(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n)$. Laske Chebychevin epäyhtälön avulla, kuinka suuri n:n on oltava, jotta A_n poikkeaa oikeasta integraalin arvosta μ korkeintaan sadasosan vähintään todennäköisyydellä 99%. Tässä voit käyttää hyväksi arviota $\mathrm{Var}(Y_i) \leq 1$.

5. 100 kappaletta sähkövastuksia kytketään rinnan yhteen. Jokaisen komponentin vastus on tasaisesti jakautunut 90 Ω ja 110 Ω välille (muita vastusarvoja ei saavuteta). Lisäksi komponenttien sähkövastukset ovat toisistaan riippumattomia. Millä todennäköisyydellä kytkennän kokonaisvastus on suurempi kuin 1.005 Ω?