# TILASTOMATEMATIIKKA

## Harjoitus 5, kevät 2015

1. Olkoon $X$ kruunujen lukumäärää kolmen kolikon heitossa.

   a) Määrää $X$:n odotusarvo ja varianssi $X$:n pistetodennäköisyyksien avulla. (Katso luentoesimerkki 2 viikolta 1.)

   b) Kohdan a) tapa ei ole kovin hedelmällinen, kun kolikkoja on useita. Sen vuoksi kannattaa miettiä mikä on $X$:n jakauma. Määrää odotusarvo ja varianssi jakaumamallin avulla.

   c) Mitä on kruunujen lukumäärän odotusarvo ja varianssi, kun kolikkoja on sata?

2. Pauli ja Paula pelaavat kruunaa tai klaavaa, jossa Pauli maksaa Paulalle yhden euron, jos heitto on kruuna, ja Paula taasen Paulille yhden euron, jos heitto on klaava. Määrää Paulin voittamien eurojen määrän odotusarvo ja varianssi, kun peliä pelataan $n$ kertaa.

3. Suurissa kaupungeissa on tunnetusti paljon liikennevaloja. Odotusaika liikennevaloissa on satunnaismuuttuja, joka vaihtelee 0 ja 2 minuutin välillä. Odotusajan tiheysfunktio saa maksimiarvonsa 0:ssa ja pienenee lineaarisesti nollaan 2 minuutin kohdalla.

   a) Määrää tiheysfunktion lauseke, keskimääräinen odotusaika ja odotusajan varianssi.

   b) Kalle Kiihdyttäjä tuntee kaupungin poikki reitin, jonka varrella on vain 10 liikennevaloa. Laske koko reitin yhteisen odotusajan keskimääräinen arvo ja keskihajonta.

4. a) Olkoot $X_1, X_2, \ldots, X_n$ eksponenttijakautuneita ja riippumattomia satunnaismuuttujia, joiden odotusarvo on $\mu$. Olkoon $M = \min_j X_j$. Osoita, että $M$ on eksponenttijakautunut odotusarvolla $\mu/n$.

   b) Eräs kauppaketju hankkii liikkeeseensä 100 energiansäästölamppua, joiden kestoaika on eksponenttijakautunut odotusarvolla 500 [vrk]. Mikä on odotettavissa oleva aika [vrk], jolloin ensimmäinen lamppu menee rikki?

   **Vihje:** Katso harjoituksen 4 tehtävä 4. Johda a)-kohdassa $M$:n kertymäfunktio.

5. (Keräilijän ongelma) Jalkapallon Meksikon MM-kisojen yhteydessä lapsilla (ja miksei aikuisillakin) oli mahdollista kerätä jalkapallokortteja ”kisapurkan” yhteydessä. Erilaisia jalkapallokortteja oli 52 kappaletta ja jokaisen purkkapaketin yhteydessä tuli 3 (ei välttämättä erilaista) jalkapallokorttia. Oletetaan, että kukin kortti oli yhtä todennäköinen (vaikkei näin tosiasiassa ollutkaan). Kuinka monta purkkapakettia tuli keskimäärin ostaa, jotta sai kerättyä kaikki 52 korttia?

   **Vihje:** Jos on kerätty $i$ erilaista korttia, niin uuden kortin saamiseen tarvittavien korttien lukumäärä $X$ noudattaa geometrista jakaumaa $X \sim \mathrm{Geo}(\frac{52-i}{52})$.