

TILASTOMATEMATIIKKA

Harjoitus 4, kevät 2015

1. Oletetaan, että Suomen korkeakouluopiskelijoiden älykkyysosamäärä $\ddot{A}O$ on jakautunut normaalijakauman mukaan parametreilla $\mu = 115$ ja $\sigma = 10$.

- a) Poimitaan umpimähkään tästä joukosta yksi opiskelija. Määrää todennäköisyydet seuraaville tapahtumille

$$\begin{array}{ll} \text{i) } \ddot{A}O \leq 100, & \text{iii) } 105 < \ddot{A}O \leq 135, \\ \text{ii) } \ddot{A}O > 150, & \text{iv) } \ddot{A}O = 120. \end{array}$$

- b) Määrää raja a , jonka yläpuolella korkeakouluopiskelijoiden $\ddot{A}O$ on 5 %:n todennäköisyydellä.

2. Tuntematonta sukellusvenettä häirittiin sonar-aaltoimpulsseilla, joiden amplitudi on vakio. Heijastuvan aallon amplitudi H noudattaa Rayleighin jakaumaa

$$f_H(h) = \begin{cases} \frac{h}{9} e^{-\frac{h^2}{18}}, & h > 0 \\ 0, & h < 0 \end{cases},$$

missä h ilmaistaan mm:nä. Määrää raja, jonka alapuolella heijastuvan aallon amplitudi on 50 %:n todennäköisyydellä. Montako impulssia on lähetettävä, jotta yli 95 %:n todennäköisyydellä heijastuvan aallon amplitudi olisi ainakin kerran suurempi kuin 3 mm?

3. Eloönjäämisfunktio S (*survival function*) ilmoittaa todennäköisyyden, että henkilö on elossa tietyn ajan kuluttua. Oletetaan, että rintasyöpäpotilaan eloonjäämisfunktio on muotoa $S(t) = 1 - F_X(t)$, missä t on syöpädiagnoosista kulunut aika vuosina ja X on elinajan ilmoittava satunnaismuuttuja, jonka oletetaan noudattavan Weibull-jakaumaa parametreilla $\alpha = 0.98$ ja $\beta = 0.30$.

- a) Laske todennäköisyys, että henkilö on elossa 5 vuotta syödiagnoosin jälkeen.
b) Mikäli henkilö on elossa 5 vuotta syöpädiagnoosin jälkeen, niin millä todennäköisyydellä hän elää vielä 5 vuotta?

4. Energiansäästölamppun valmistajan mukaan lamppu kestää käytössä keskimäärin 500 [vrk]. Tarkastellaan kolmen rinnankytketyn lamppun muodostaman valaisimen kestoaikaa. Oletetaan, että lamppujen kestoajat ovat riippumattomia ja samalla tavalla jakautuneita eksponenttijakaumaa noudattaen.

- a) Määrää valaisimen kestoajan jakauma (kertymäfunktio).
b) Millä todennäköisyydellä valaisimen kesto aika on vähintään 2 vuotta?

5. Osakkeiden hinnan mallittamisessa käytetään kuuluisaa Black-Scholesin mallia, jonka mukaan osakkeen hinta ajanhetkellä t on satunnaismuuttuja

$$H(t) = H(0) \cdot \exp\left(\left(b - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)\right),$$

missä $H(0)$ on osakkeen hinta ajanhetkellä $t = 0$, $b, \sigma > 0$ ovat vakioita ja $W(t) \sim N(0, t)$ on satunnaismuuttuja. Oletetaan, että $H(0) = 100$, $b = 0.1$ ja $\sigma = 0.3$. Millä todennäköisyydellä osakkeen hinta ajanhetkellä $t = 1$ on välillä $[90, 110]$?