Harjoitus 6

1. A = paikan varannut ei saavu, $P(A) = 0,05 = p$,

X = niiden lukumäärä, jotka eivät saavu; $X \sim Bin(n,p),\ n = 184$.

a) $P(X \geq 4) = 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)]$
$= \ldots \approx 0,9836.$

b) $X \overset{\text{likim.}}{\sim} Poi(a),\ a = np = 184 \cdot 0,05 = 9,2.$
$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - e^{-a} \cdot (\frac{a^0}{0!} + \ldots + \frac{a^3}{3!}) \approx 0,9816.$

c) $X \overset{\text{likim.}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, missä $\mu = E(X) = np = 9,2$ ja
$\sigma^2 = Var(X) = np(1-p) = 8,74$
$P(X \geq 4) = P(\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \geq \frac{4-np}{\sqrt{np(1-p)}}) = P(Z \geq \frac{4-np}{\sqrt{np(1-p)}})$
$= 1 - \Phi(\frac{4-np}{\sqrt{np(1-p)}}) = 1 - \Phi(-1,76) = 0,9608.$

Jatkuvuuskorjauksella:
$P(X \geq 4) = P(X \geq 3,5) = 1 - P(X < 3,5) = 1 - P(\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{3{,}5-np}{\sqrt{np(1-p)}}) = 1 - \Phi(-1,93) = 0,9732.$

2. X_i = i:s siirtymä, $X_i \in \{-1, 0, 1\}$.
$\mu = E(X_i) = -1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = 0.$
$E(X_i^2) = (-1)^2 \cdot \frac{1}{3} + 0^2 \cdot \frac{1}{3} + 1^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$
Siten $\sigma^2 = Var(X_i) = E(X_i^2) - (E(X_i))^2 = \frac{2}{3} \ \Rightarrow\ \sigma = \sqrt{\frac{2}{3}}.$
Paikka 10 000 siirtymän jälkeen $S = \Sigma_{i=1}^{10000} X_i;\quad E(S) = 10000\mu;\quad Var(S) = 10000\sigma^2.$
X_i:t ovat riippumattomia ja samalla tavoin jakautuneita. Keskeinen raja-arvolause $\Rightarrow$
$S \overset{\text{likim.}}{\sim} N(10000\mu, 10000\sigma^2)$

$P(S \geq 100) = 1 - P(S < 100) = 1 - P(\frac{S-10000\mu}{\sqrt{10000}\sigma} < \frac{100-10000\mu}{\sqrt{10000}\sigma}) = 1 - \Phi(\sqrt{\frac{3}{2}}) = 1 - \Phi(1,22) \approx 0,11.$

3 X_i= nettotulos i:nnessä pelissä;

X_i = -1, jos häviää pelin ja X_i = 2, jos voittaa pelin

$E(X_i) = -1 \cdot P(\text{häviö}) + 2 \cdot P(\text{voitto}) = -1 \cdot \frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$.

$E(X_i^2) = (-1)^2 \cdot \frac{3}{4} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$, joten varianssi on

$Var(X_i) = E(X_i^2) - [E(X_i)]^2 = \frac{27}{16}$.

X=Ollin nettovoitto 298 pelin jälkeen = $\Sigma_{i=1}^{298} X_i$

a) $E(X) = E(\Sigma_{i=1}^{298} X_i) = 298 \cdot (-\frac{1}{4}) = -74,5$.

Siis Olli on pelaamisen jälkeen keskimäärin 74,5 euroa köyhempi.

b) $X \overset{\text{likim.}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, missä

$\mu = E(X) = -74,5$ ja $\sigma^2 = Var(X) = Var(\Sigma_{i=1}^{298} X_i) = 298 \cdot \frac{27}{16}$

$\Rightarrow \sigma \approx 22,42$.

$P(\text{Olli ei häviä yhtään rahaa}) = P(X \geq 0) = 1 - P(X < 0)$

$= 1 - P(Z < \frac{0-(-74,5)}{22,42}) = 1 - \Phi(3,32) = 0,0005$.

4.

a) Muunnoksen $Y_i = g(X_i)$ odotusarvo on $E(Y_i) = E(g(X_i)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_{X_i}(x)dx$.

$X_i \sim \text{Tas}[0,1]$, joten $f_{X_i}(x) = 1$, kun $0 < x < 1$ ja 0 muulloin.

$\Rightarrow E(Y_i) = \int_0^1 g(x)dx$.

b) $A_n = \frac{1}{n}(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n)$; $\quad E(A_n) = \frac{1}{n} \cdot \Sigma_{i=1}^{n} E(Y_i) = \int_0^1 g(x)dx = \mu$

$\sigma^2 = Var(A_n) = \frac{1}{n^2} \cdot \Sigma_{i=1}^{n} Var(Y_i) \leq \frac{1}{n^2} \cdot (1 + 1 + \cdots + 1) = \frac{1}{n}$.

Chebychev $\Rightarrow (|A_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \leq \frac{1}{n\varepsilon^2}$

Ehdosta $P(|A_n - \mu| \leq 0,01) = 0,99 \Leftrightarrow P(|A_n - \mu| \geq 0,01) \leq 0,01$

nähdään, että Chebychevin epäyhtälön $\varepsilon = 0,01$ ja $\frac{1}{n\varepsilon^2} = \frac{1}{n \cdot 0,01^2} = 0,01 \Rightarrow n = 1000000$.

5. X_i= komponentin i vastus, $X_i \sim \mathrm{Tas}[90, 110]$; $\quad i = 1, \cdots, 100$

$f_{X_i}(x) = \frac{1}{20}$, kun $90 \leq x \leq 110$ ja $f_{X_i}(x) = 0$, muulloin.

Rinnankytkennässä kokonaisvastus $X = \frac{1}{\Sigma_{i=1}^n \frac{1}{X_i}} \overset{\text{merk.}}{=} \frac{1}{Y}$; $\quad$ siis $Y = \Sigma_{i=1}^n \frac{1}{X_i}$, $\quad n = 100$.

$\mu = E(\frac{1}{X_i}) = \int_{90}^{110} \frac{1}{x} f_{X_i}(x) \mathrm{d}x = \ldots = \frac{1}{20} \ln(\frac{11}{9}) \approx 0,010033$.

$E((\frac{1}{X_i})^2) = \int_{90}^{110} \frac{1}{x^2} f_{X_i}(x) \mathrm{d}x = \ldots = \frac{1}{20}(\frac{1}{90} - \frac{1}{110}) \approx 1,01 \cdot 10^{-4}$.

Siten $\sigma^2 = Var(\frac{1}{X_i}) = E((\frac{1}{X_i})^2) - (E(\frac{1}{X_i}))^2 \approx 3,3828 \cdot 10^{-7} \quad \Rightarrow \quad \sigma \approx 5,81619 \cdot 10^{-4}$.

$\frac{1}{X_i}$:t ovat riippumattomia ja samalla tavalla jakautuneita. Keskeinen raja-arvolause $\Rightarrow$

$Y = \Sigma_{i=1}^n \frac{1}{X_i} \overset{\text{likim.}}{\sim} N(n\mu, n\sigma^2)$.

Kysytty todennäköisyys:

$P(X > 1,005) = P(\frac{1}{X} < \frac{1}{1,005}) = P(Y < \frac{1}{1,005})$

$= P(\frac{Y - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} < \frac{\frac{1}{1,005} - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}) = \Phi(\frac{\frac{1}{1,005} - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}) = \Phi(-1,43) = 0,0764$.