Harjoitus 5

1. Satunnaismuuttuja X = kruunujen lukumäärä kolmen kolikon heitossa

a) $S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$, missä H= kruunu, T= klaava, joten

$P(X=0) = \frac{1}{8}; \quad P(X=1) = \frac{3}{8}; \quad P(X=2) = \frac{3}{8}; \quad P(X=3) = \frac{1}{8}$

$E(X) = \sum_{k=0}^{3} kP(X=k) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 1,5.$

$E(X^2) = \sum_{k=0}^{3} k^2 P(X=k) = 0^2 \cdot \frac{1}{8} + 1^2 \cdot \frac{3}{8} + 2^2 \cdot \frac{3}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{8} = 3.$

$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 0,75.$

b) $X \sim Bin(n,p)$, missä n=3 ja $p = P$(kruunu)$= 0,5.$

$E(X) = n \cdot p = 1,5 \qquad Var(X) = n \cdot p \cdot (1-p) = 0,75.$

c) $E(X) = 100 \cdot 0,5 = 50 \qquad Var(X) = 100 \cdot 0,50 \cdot (1 - 0,50) = 25.$

2. X_i = Paulin saama euromäärä i:nnellä heitolla.

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{, jos } i\text{:s heitto on klaava} \\ -1 & \text{, jos } i\text{:s heitto on kruuna} \end{cases}$$

$E(X_i) = \mu = \Sigma x_j P(X_i = x_j) = 1 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = 0$

$Var(X_i) = \sigma^2 = E(X_i - \mu)^2 = E(X_i^2) - \mu^2 = 1^2 \cdot \frac{1}{2} + (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} - 0^2 = 1$

$Y = X_1 + X_2 \cdots + X_n$= Paulin voittamien eurojen määrä n:llä heitolla.

$E(Y) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = 0$

$Var(Y) = Var(X_1) + Var(X_2) + \cdots + Var(X_n) = n.$

3. a) X_i = odotusaika liikennevaloissa i.

$f(t) = 1 - \frac{1}{2}t,\ 0 < t < 2$ ja $f(t) = 0$, muulloin.

$\mu = E(X_i) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t)\mathrm{d}t = \int_0^2 t \cdot (1 - \frac{1}{2}t)\mathrm{d}t = \ldots = \frac{2}{3}$.

$Var(X_i) = \int_{-\infty}^{\infty}(t-\mu)^2 \cdot f(t)\mathrm{d}t = \int_0^2 (t - \frac{2}{3})^2 \cdot (1 - \frac{1}{2}t)\mathrm{d}t = \ldots = \frac{2}{9}$.

b) T = odotusaika kymmenessä liikennevaloissa

$E(T) = E(X_1 + X_2 + \ldots + X_{10}) = E(X_1) + \ldots + E(X_{10}) = 10 \cdot \frac{2}{3} = \frac{20}{3}$.

$Var(T) = Var(X_1 + X_2 + \ldots + X_{10}) = Var(X_1) + \ldots + Var(X_{10}) = 10 \cdot \frac{2}{9} = \frac{20}{9}$.

Siten T:n hajonta on $\sqrt{\frac{20}{9}}$.

4. a) $X_i \sim Exp(a)$; $E(X_i) = \frac{1}{a} = \mu$

$\Rightarrow$ Kertymäfunktio $F_{X_i}(t) = P(X_i \leq t) = 1 - e^{-\frac{t}{\mu}}$, kun $t \geq 0$.

Satunnaismuuttujan $M = \min X_j$ kertymäfunktio:

$F_M(t) = P(M \leq t) = P(\min X_j \leq t) = 1 - P(\min X_j > t)$

$= 1 - P(\text{kaikki } X_j\text{:t} > t) = 1 - P(X_1 > t) \cdot P(X_2 > t) \cdots P(X_n > t)$

$= 1 - [1 - P(X_1 \leq t)] \cdot [1 - P(X_2 \leq t)] \cdots [1 - P(X_n \leq t)]$

$= 1 - (1 - F_{X_i}(t))^n = 1 - (e^{-\frac{t}{\mu}})^n = 1 - e^{-\frac{n}{\mu}t}$, kun $t \geq 0$.

Siis $M \sim Exp(\lambda)$ parametrilla $\lambda = \frac{n}{\mu}$, joten $E(M) = \frac{1}{\lambda} = \frac{\mu}{n}$.

b) X_i= Lampun numero i kestoaika, $i = 1, \cdots, 100$; $X_i \sim Exp(a)$

X= aika, jolloin ensimmäinen lamppu menee rikki

$X = \min X_j$

Odotettavissa oleva aika, jolloin ensimmäinen lamppu menee rikki on

(vrt a-kohta) $E(X) = E(M) = \frac{\mu}{n} = \frac{500}{100} = 5$vrk.

5. $X=$ ostettavien purkkapakettien lukumäärä

$X_i=$ uuden erilaisen kortin saamiseen tarvittavien korttien lukumäärä, kun on jo saatu i erilaista

$X_i \sim Geom(\frac{52-i}{52})$; $\quad E(X_i) = \frac{52}{52-i}$

Jotta saisi kaikki 52 korttia, on kortteja hankittava $X_0 + X_1 + \cdots + X_{50} + X_{51}$ kappaletta.

Hankittavien korttien keskimääräinen määrä on

$$E(X_0) + E(X_1) + \cdots + E(X_{50}) + E(X_{51}) = 52 \cdot (\frac{1}{52} + \frac{1}{51} + \cdots + \frac{1}{2} + \frac{1}{1}) = 52 \cdot \sum_{k=1}^{52} \frac{1}{k} \approx 235,978$$

Ostettavien purkkapakettien lukumäärä $X = \lceil \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{51} X_i \rceil = \min\{k \in N | k \geq \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{51} X_i\}$.

Jaettaessa kokonaisluku $\sum_{i=0}^{51} X_i$ luvulla 3 saadaan jakojäännökseksi 0,1 tai 2. Siten

$\frac{1}{3} \sum_{i=0}^{51} X_i \quad \leq X \leq \quad (\frac{1}{3} \sum_{i=0}^{51} X_i) + \frac{2}{3}$,

joten ostettavien purkkapakettien keskimääräinen määrä $E(X)$ on välillä

$\frac{1}{3} \sum_{i=0}^{51} E(X_i) \quad \leq E(X) \leq \quad \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{51} E(X_i) + \frac{2}{3}$

$\Rightarrow E(X) \approx 79.$