Harjoitus 4

1. X = ÄO, $X \sim N(115, 10^2) \Rightarrow Z = \frac{X-115}{10} \sim N(0,1)$

a) i) $P(X \leq 100) = P(\frac{X-115}{10} \leq \frac{100-115}{10}) = P(Z \leq -1,5)$

$= \Phi(-1,5) = 1 - \Phi(1,5) = 1 - 0,9332 = 0,0668.$

ii) $P(X > 150) = P(\frac{X-115}{10} > \frac{150-115}{10}) = P(Z > 3,5)$

$= 1 - P(Z \leq 3,5) = 1 - \Phi(3,5) = 1 - 0,9998 = 0,0002.$

iii) $P(105 < X \leq 135) = P(\frac{105-115}{10} < \frac{X-115}{10} \leq \frac{135-115}{10}) = P(-1 < Z \leq 2)$

$= \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) + \Phi(1) - 1 = 0,9972 + 0,8413 - 1 = 0,8185.$

iv) $P(X = 120) = 0.$

b) $P(X > a) = 0,05 \Leftrightarrow P(X \leq a) = 0,95 \Leftrightarrow P(\frac{X-115}{10} \leq \frac{a-115}{10}) = 0,95$

$\Rightarrow \Phi(\frac{a-115}{10}) = 0,95 \overset{taulukko1}{\approx} \Phi(1,645)$

$\Rightarrow \frac{a-115}{10} = 1,645 \quad \Rightarrow a = 131,45$

2. H = heijastuvan aallon amplitudi.

Kertymäfunktio $F(h) = P(H \leq h) = \int_{-\infty}^{h} f_H(x)\mathrm{d}x = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{h^2}{18}}$, $h \geq 0$.

a) $P(H \leq h) = F(h) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{h^2}{18}} = 0{,}5 \Rightarrow \mathrm{h} = \sqrt{18 \ln 2} \approx 3,53.$

b) Y = niiden impulssien lukumäärä, joiden heijastuvan aallon amplitudi on suurempi kuin 3

$Y \sim Bin(n,p)$, missä $p = P(H > 3) = 1 - P(H \leq 3) = 1 - F(3) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$

Lähetettävien impulssien määrä n saadaan ehdosta

$P(Y \geq 1) \geq 0,95 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(Y = 0) \geq 0,95 \quad \Leftrightarrow \quad P(Y = 0) \leq 0,05 \quad \Leftrightarrow \quad (1-p)^n \leq 0,05$

$\Rightarrow n \geq \frac{\ln 0{,}05}{\ln(1-\mathrm{p})} \approx 3,2.$

Vastaus: on lähetettävä vähintään 4 impulssia.

3. Weibull-jakauman tiheysfunktio $f_X(x) = \alpha\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha x^\beta}$, kun $x > 0$, 0 muulloin.

Kertymäfunktio $F_X(x) = 1 - e^{-\alpha x^\beta}$, kun $x > 0$. Siten eloonjäämisfunktio $S(t) = e^{-\alpha t^\beta}$.

a) P(elossa 5 vuotta diagnoosin jälkeen)$= S(5) = e^{-0,98\cdot 5^{0,3}} \approx 0,204$.

b) P(elää vielä 5 vuotta, kun on elossa 5 vuotta diagnoosin jälkeen)$=$ P(elossa 10 vuotta diagnoosin jälkeen, ehdolla että on elossa 5 vuotta diagnoosin jälkeen)$= \frac{S(10)}{S(5)} \approx 0,693$.

4. X_i= lampun i kestoaika [vrk]; $X_i \sim Exp(\lambda),\ i = 1,2,3$.

Tiheysfunktio $f_{X_i}(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}$, kun $t \geq 0$ ja $f_{X_i}(t) = 0$, kun $t < 0$.

Kertymäfunktio $F_{X_i}(t) = \int_0^t f(x)\mathrm{d}x = 1 - e^{-\lambda t}$, kun $t \geq 0$.

Lamppu kestää keskimäärin 500 vrk $\Rightarrow \lambda = \frac{1}{500}$.

a) Rinnan kytketty systeemi; X = valaisimen (koko systeemin) kestoaika.

$F_X(t) = P(X \leq t) = P$(systeemi menee rikki ennen hetkeä t)

$= P((X_1 \leq t) \cap (X_2 \leq t) \cap (X_3 \leq t)) = P(X_1 \leq t) \cdot P(X_2 \leq t) \cdot P(X_3 \leq t)$

$= F_{X_1}(t) \cdot F_{X_2}(t) \cdot F_{X_2}(t) = (1 - e^{-\lambda t})^3 = (1 - e^{-\frac{t}{500}})^3$.

b) P(valaisimen kestoaika vähintään 2 vuotta)$=P(X \geq 730\text{vrk})$

$= 1 - P(X \leq 730) = 1 - F_X(730) \approx 0,547$.

5. $H(1) = 100e^{A+\sigma W(1)}$, missä

$A = (0,1 - \frac{1}{2} \cdot 0,3^2) \cdot 1 = 0,055; \quad \sigma = 0,3$ ja $W(1) \sim N(0,1)$.

$P(90 \leq H(1) \leq 110) = P(\frac{90}{100} \leq e^{A+\sigma W(1)} \leq \frac{110}{100})$

$= P(\ln\frac{90}{100} \leq A + \sigma W(1) \leq \ln\frac{110}{100}) = P(\ln\frac{90}{100} - A \leq \sigma W(1) \leq \ln\frac{110}{100} - A)$

$= P(\frac{\ln\frac{90}{100} - A}{\sigma} \leq W(1) \leq \frac{\ln\frac{110}{100} - A}{\sigma}) = P(-0,5345 \leq W(1) \leq 0,1344)$

$\approx \Phi(0,13) - \Phi(-0,53) \approx 0,25$.