Harjoitus 3

1. a) Satunnaismuuttuja X ilmoittaa tiikerien lukumäärän 10:ssä muropaketissa. $X \sim Bin(n,p)$;

$P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, \quad k = 0,1,2,\cdots,n; \quad p = P(\text{paketissa on tiikeri}) = \frac{1}{6}$ ja $n = 10$.

$P(\text{lapsi saa vähintään yhden tiikerin}) = P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{10}{0} \cdot (\frac{1}{6})^0 \cdot (\frac{5}{6})^{10} \approx 0,838.$

b) Satunnaismuuttuja Y ilmoittaa kuinka monennella kerralla saadaan ensimmäinen tiikeri.

$Y \sim Geom(p); \quad P(Y=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p, \quad k = 1,2,\cdots$

$P(\text{lapsi saa ensimmäisen tiikerin viimeisestä paketista}) = P(Y=10) = (\frac{5}{6})^9 \cdot \frac{1}{6} \approx 0,0323.$

2. Satunnaismuuttuja $X=$ yksittäisessä ottelussa tehtyjen maalien lukumäärä.

$X \sim Poi(a)$, joten $P(X=k) = \frac{a^k}{k!}e^{-a}, \qquad a = 5,9$

Tapahtuma $A=$'yksittäisessä ottelussa tehdään yli 7 maalia'

a) $P(A) = P(X > 7) = 1 - P(X \leq 7) = 1 - e^{-5,9}(\frac{5,9^0}{0!} + \frac{5,9^1}{1!} + \cdots + \frac{5,9^7}{7!}) \approx 0,242$

b) $Y=$ tapahtuman A esiintymiskertojen lukumäärä 7 ottelun joukossa.

$Y \sim Bin(n,p), \qquad n = 7, \qquad p = P(A) \approx 0,242$

$P(\text{vähintään kahdessa ottelussa tehdään yli 7 maalia}) = P(Y \geq 2) = P(Y = 2,3,\cdots,7)$

$= 1 - [P(Y=0) + P(Y=1)] = 1 - [\binom{7}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^7 + \binom{7}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^{7-1}] \approx 0,535$

3. $X =$ viallisten levyjen lukumäärä pakkauksessa, $X \sim Bin(n,p), \; n = 10, \; p = 0,01$

a) $P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) =$

$\binom{10}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^{10} + \binom{10}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^9 + \binom{10}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^8 \approx 0,999886.$

b) $Y =$ Niiden pakkausten lukumäärä, joissa kaikki levyt ovat virheettömiä,

$Y \sim Bin(n,p), \; p = P(\text{pakkauksessa kaikki virhettömiä}) = P(X=0) = 0,99^{10}.$

$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y=0) = 1 - \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^n = 1 - (1-p)^n \geq 0,995$

$\Rightarrow \; (1-p)^n \leq 0,005 \;\; \Rightarrow \; n \geq \frac{\ln(0,005)}{\ln(1-p)} \approx 2,257 \;\; \Rightarrow \; n \geq 3.$

4. $P(\text{läpäisee tarkistuksen}) = 0,01 = p$

a) $P(\text{läpäisee } n\text{-kertaisen tarkistuksen}) = p^n \leq 2 \cdot 10^{-8}$

$\Rightarrow n \geq \frac{\ln(2 \cdot 10^{-8})}{\ln(p)} \approx 3,84 \Rightarrow n \geq 4.$

b) $P(\text{läpäisee 1.tarkistuksen JA läpäisee 2. tark. JA ei läpäise 3. tark.})$

$= p \cdot p \cdot (1-p) = 9,9 \cdot 10^{-5}.$

5. a) Yhteensä toistoja on $m + k$ kappaletta, joista viimeisen täytyy olla onnistuminen.

Muille 'paikoille' täytyy sijoittaa $m + k - 1$ toistoa, joista k kappaletta on epäonnistumisia. Nämä k epäonnistumista voidaan sijoittaa $m + k - 1$ 'paikalle' yhteensä $\binom{m+k-1}{k}$ eri tavalla. Koska yhden tapahtuman todennäköisyys (esim. alkuun k epäonnistumista ja loppuun m onnistumista) on $p^m \cdot (1-p)^k$, niin kysytty todennäköisyys on $P(X = k) = \binom{m+k-1}{k} \cdot p^m \cdot (1-p)^k$.

b) Nyt onnistumisten määrä $m = 3$ ja turhien toistojen lukumäärä $k = 7$, joten

$P(\text{kolmas tiikeri tulee 10. paketissa}) = P(X = 7) = \binom{3+7-1}{7} \cdot (\frac{1}{6})^3 \cdot (\frac{5}{6})^7 \approx 0,0465.$