Harjoitus 2

1. Tarkastellaan seuraavia tapahtumia:

A="silmäluku on parillinen", B="silmäluku on pariton", C="silmäluku on ≥ 3"

$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(C) = \frac{2}{3}.$

a) $P(A \cap B) = P($"silmäluku on parillinen ja pariton"$) = 0 \neq P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4}$, joten tapahtumat A ja B eivät ole riippumattomia.

b) $P(A \cap \overline{B}) = P(A) = \frac{1}{2} \neq P(A) \cdot P(\overline{B}) = \frac{1}{4}$, joten tapahtumat A ja $\overline{B}$ eivät ole riippumattomia.

c) $P(B \cap C) = P($"silmäluku on 3 tai 5"$) = \frac{1}{3} = P(B) \cdot P(C)$ joten B ja C ovat riippumattomat.

d) $P(A \cap B \cap C) = 0 \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{6}$, joten A, B ja C eivät ole (keskinäisesti) riippumattomia.

(Mutta A ja C, samoin kuin B ja C, ovat pareittain riippumattomia (vrt kohta c)).

2. Merkitään tapahtumia R=sijoittaa rahastoihin; O=sijoittaa osakkeisiin

$P(R) = 0,58 \quad P(O) = 0,25 \quad P(R \cap O) = 0,19$

a) $P(O|R) = \frac{P(R \cap O)}{P(R)} = \frac{0,19}{0,58} \approx 0,328$

b) $P(R|O) = \frac{P(R \cap O)}{P(O)} = \frac{0,19}{0,25} = 0,76$

c) yleensä $P(A|B) \neq P(B|A)$.

3. P(kaksoset ovat identtisiä) $= p$. $\quad P(i$:s lapsi on poika)$= 0,5$.

a) P(molemmat kaksosista on poikia)$=$ P(kaksoset identtisiä JA poikia TAI kaksoset erimunaisia JA poikia) $=p \cdot \frac{1}{2} + (1-p) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(1+p)$.

b) P(1. poika ja 2.tyttö) $=$ P(kaksoset erimunaisia ja 1.poika ja 2. tyttö) $= (1-p) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(1-p)$.

c) $P(\text{2. tyttö} \mid \text{1. poika}) = \frac{P(\text{2. tyttö ja 1.poika})}{P(\text{1.poika})} = \frac{\frac{1}{4}(1-p)}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(1-p)$.

d) $P(\text{2. tyttö} \mid \text{1. tyttö}) = \frac{P(\text{2. tyttö ja 1.tyttö})}{P(\text{1.tyttö})} = \frac{\frac{1}{4}(1+p)}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(1+p)$.

4. Isän geeniperimä aa.

Äidin geeniperimä AA, Aa tai aA, jotka kaikki ovat yhtä todennäköisiä.

Merkitään A=äidillä on AA,

B=kummallakaan lapsella ei ole riskiä sairastua

$\Rightarrow P(A) = \frac{1}{3}, P(\overline{A}) = \frac{2}{3}$

a) $P(B|A) = 1$.

b) $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\overline{A}) \cdot P(\overline{A})$

$= 1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$.

c) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$.

5. P(Merkki vaihtuu)$= 0,1 \quad P$(Merkki ei vaihdu)$= 0,9$.

a) V=vastaanotetaan 1, $\quad L$=lähetetään 1

$P(V|L) = P$(vastaanotetaan 1, kun lähetetään 1)

$= P$((jokainen välittää 1:n oikein) TAI (A ja B vaihtaa merkin JA C ei vaihda) TAI

(A ja C vaihtaa merkin JA B ei vaihda) TAI (B ja C vaihtaa merkin JA A ei vaihda))

$= 0,9^3 + 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,9 + 0,1 \cdot 0,9 \cdot 0,1 + 0,9 \cdot 0,1 \cdot 0,1 = 0,756$.

b) $P(L) = 0,7$.

P(lähetetty 1, kun vastaanotetaan 1)$= P(L|V) = \frac{P(L \cap V)}{P(V)} = \frac{P(V|L) \cdot P(L)}{P(V|L) \cdot P(L) + P(V|\overline{L}) \cdot P(\overline{L})}$, missä

$P(V|\overline{L}) = P$(vastaanotetaan 1, kun lähetetty 0) $= 0,1^3 + 3 \cdot 0,9^2 \cdot 0,1 = 0,244$.

Siten saadaan, että $P(L|V) = \frac{0,756 \cdot 0,7}{0,756 \cdot 0,7 + 0,244 \cdot 0,3} = 0,878$.