Harjoitus 11

1. a) Otoksien määrä $k = 4$; otoskoot $n_i = 5$; havaintojen kokonaismäärä $n = 20$.

ANOVA-taulukko:

Vaihtelut	Vapausasteet	SS	Skaalattu $SS(MS)$	Testimuuttuja
Otoksien välillä	$4 - 1 = 3$	75 081,72	25 027,24	1,70
Otoksien sisällä	$20 - 4 = 16$	235 419,04	14 713,69	
Yhteensä	19	310 500,76		

b) ja c) ANOVA-testi

Hypoteesit:

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ (odotettavissa oleva ajomatka sama kaikilla tutkituilla tyypeillä)

H_1 : ainakin kaksi odotusarvoista μ_i poikkeaa toisistaan

Testimuuttuja:

$$F = \frac{SS_B/(k-1)}{SS_W/(n-k)} \sim F(k-1, n-k)$$

Riskitaso: $\alpha = 0{,}05$

Hylkäysalue:

$\hat{F} > r_0 = 3{,}24$ (raja taulukosta 4, kun $f_1 = 3$ ja $f_2 = 16$)

Testimuuttujan arvo: ANOVA-taulukosta $\hat{F} = 1,70 < 3,24$

Johtopäätös: H_0 on voimassa (tyyppi ei vaikuta)

2. Lasketaan ensin neliösummien arvot:

Koko otoksen keskiarvo $\overline{x} = \frac{10}{30} \cdot 1,63 + \frac{10}{30} \cdot 1,56 + \frac{10}{30} \cdot 1,42 = 1,53666 \Rightarrow$

Otoksien välinen neliösumma on

$SS_B = \Sigma_{i=1}^{k} n_i(\overline{x}_i - \overline{x})^2 = 10 \cdot (1,63 - 1,53666)^2 + 10 \cdot (1,56 - 1,53666)^2 + 10 \cdot (1,42 - 1,53666)^2 \approx 0,2287.$

Otoksien sisäinen neliösumma on

$SS_W = \Sigma_{i=1}^{k} (n_i - 1)s_i^2 = (10-1) \cdot 0,27^2 + (10-1) \cdot 0,24^2 + (10-1) \cdot 0,26^2 = 1,7829.$

Kootaan tiedot ANOVA-taulukkoon:

Vaihtelut	Vapausasteet	SS	Skaalattu SS	Testimuuttuja
Otoksien välillä	$3-1=2$	0,2287	0,1143	1,73
Otoksien sisällä	$30-3=27$	1,7829	0,0660	
Yhteensä	29	2,0116		

Hypoteesit:

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ (kimmokertoimilla ei ole eroa)

H_1 : ainakin kaksi odotusarvoista μ_i poikkeaa toisistaan

Testimuuttuja:

$$F = \frac{SS_B/(k-1)}{SS_W/(n-k)} \sim F(k-1, n-k)$$

Riskitaso: $\alpha = 0{,}05$

Hylkäysalue:

$\hat{F} > r_0 = 3{,}35$ (raja taulukosta 4, kun $f_1 = 2$ ja $f_2 = 27$)

Testimuuttujan arvo: ANOVA-taulukosta $\hat{F} = 1,73 < 3,35$

Johtopäätös: H_0 on voimassa.

3. Havaintoaineistosta saadaan otoksien määrä $k = 3$, otoskoot $n_i = 5$,

havaintojen kokonaismäärä $n = 15$, otoskeskiarvot: $\overline{x}_1 = 16$; $\overline{x}_2 = 20$; $\overline{x}_3 = 27$;

kaikkien havaintojen keskiarvo $\overline{x} = 21$;

otoshajonnat: $s_1 = 3$; $s_2 = 3,1623$; $s_3 = 3,3166$.

Lasketaan neliösummien arvot: $SS_B = 5 \cdot (16-21)^2 + 5 \cdot (20-21)^2 + 5 \cdot (27-21)^2 = 310$;

$SS_W = 4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3,1623^2 + 4 \cdot 3,3166^2 = 120$.

ANOVA-taulukko:

Vaihtelut	Vapausasteet	SS	Skaalattu SS	Testimuuttuja
Otoksien välillä	$3-1=2$	310	155	15,5
Otoksien sisällä	$15-3=12$	120	10	
Yhteensä	14			

Hypoteesit:

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ (lampun keskimääräinen käyttöikä ei riipu valmistajasta)

H_1 : ainakin kaksi odotusarvoista μ_i poikkeaa toisistaan

Testimuuttuja:

$$F = \frac{SS_B/(k-1)}{SS_W/(n-k)} \sim F(k-1, n-k)$$

Riskitaso: $\alpha = 0{,}05$

Hylkäysalue:

$\hat{F} > r_0 = 3{,}89$ (raja taulukosta 4, kun $f_1 = 2$ ja $f_2 = 12$)

Testimuuttujan arvo: ANOVA-taulukosta $\hat{F} = 15,5 > 3,89$

Johtopäätös: H_0 hylätään; ts. käyttöikä riippuu valmistajasta.

(Graafisilla laskimilla p-arvo 0,000472)

4. Post hoc vertailut

Hypoteesit:

$H_0 : \mu_i - \mu_j = 0$ (valmistajien i ja j välillä ei ole eroa)

$H_1 : \mu_i \neq \mu_j$

Testimuuttuja:

$$T = \frac{\overline{X}_i - \overline{X}_j}{\sqrt{(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j})\frac{SS_W}{n-k}}} \sim t_{n-k}$$

Vertailtavat parit voidaan valita $m = \binom{3}{2} = 3$ eri tavalla, joten riskitaso $= \frac{\alpha}{m} \approx 0,01667$

H_0:n hylkäysalue:

$|\hat{T}| > r_0$, missä kriittinen arvo $r_0 \in]2.681, 3.055[$. (Merkitsevyystasoa $0,01667$ ei löydy taulukosta, joten r_0:n alaraja (vast. yläraja) on arvioitu taulukosta 2, kun $f = 15 - 3 = 12$ ja merkitsevyystaso kaksisuuntaisessa testissä on 0,02 (vast. 0,01)).

(Graafisilla laskimilla saa kriitiseksi arvoksi $r_0 = 2,779$.)

Testimuuttujan arvot ja johtopäätökset: (tarvittavat lukuarvot tehtävästä 3)

a) $i = 1$ ja $j = 2$; $\hat{T} = \frac{16-20}{\sqrt{(\frac{1}{5}+\frac{1}{5})\cdot 10}} = -2,0 \in [-r_0, r_0]$.
Johtopäätös: Koska $|\hat{T}| < r_0$, niin H_0 jää voimaan; ts. valmistajien 1 ja 2 välillä ei ole eroa.

b) $i = 2$ ja $j = 3$; $\hat{T} = \frac{20-27}{\sqrt{(\frac{1}{5}+\frac{1}{5})\cdot 10}} = -3,5 \notin [-r_0, r_0]$.
Johtopäätös: H_0 hylätään; ts. valmistajien 2 ja 3 välillä on eroa.

c) $i = 1$ ja $j = 3$; $\hat{T} = \frac{16-27}{\sqrt{(\frac{1}{5}+\frac{1}{5})\cdot 10}} = -5,5 \notin [-r_0, r_0]$.
Johtopäätös: H_0 hylätään; ts. valmistajien 1 ja 3 välillä on eroa.