Tilastomatematiikka

Loppukoe 10.05.2014

1. a) Anna esimerkki diskreetistä satunnaismuuttujasta X.

   b) Määrää X:n kertymäfunktio.

   c) Olkoon A tapahtuma, jolle $P(A) \neq 0$. Anna jokin esimerkki satunnaismuuttujaan X liittyvästä tapahtumasta A, jolle edellinen ehto on voimassa, ja laske tapahtuman todennäköisyys.

2. Olkoot A ja B riippumattomia tapahtumia, joille $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{2}{5}$ ja $P(A \cup B) = \frac{11}{20}$.

   a) Tutki, ovatko tapahtumat A ja B riippumattomia.

   b) Laske $P(A|B)$.

   c) Laske $P(\overline{B}|A)$.

3. Väsytystestauksessa kuormitetaan testisauvoja ja halutaan selvittää sauvojen väsymisraja. Oletetaan, että väsymisraja X on normaalijakautunut satunnaismuuttuja parametrein μ ja σ^2. Testattiin 25 sauvaa ja otoksesta saatiin tunnusluvut $\overline{x} = 195.5$ [MPa] ja $s = 17.7$ [Mpa]. Määrää väsymisrajan todellisen odotusarvon 95 %:n luottamusväli.

4. Suprajohtavien levyjen valmistukseen oli kehitteillä neljä eri menetelmää A, B, C ja D. Kullakin menetelmällä valmistettiin 50 levyä, joiden suprajohtavuus testattiin jäähdyttämällä levyt nestemäisellä typellä. Saatiin seuraavat tulokset

Menetelmä	A	B	C	D	Yht.
Johtava	31	42	22	25	120
Viallinen	19	8	28	25	80
Yhteensä	50	50	50	50	200

   Testaa riskitasolla $\alpha = 0.05$, onko eri menetelmillä vaikutusta levyn suprajohtavuuteen.

5. Testattiin eräiden teräksestä valmistettujen komponenttien kestävyyttä syklisessä kuormituksessa ja saatiin seuraavat havainnot

x_i	6.10	6.10	6.10	6.03	6.03	6.03	5.98	5.98	5.98
y_i	10.28	10.39	10.43	11.46	11.82	11.96	12.17	12.18	12.37

   missä x_i on jännitysamplitudin σ_i [MPa] logaritmi $x_i = \ln \sigma_i$ ja y_i komponentin kestämien syklien lukumäärän N_i logaritmi $y_i = \ln N_i$.

   a) Laske otoksen (x_i, y_i) korrelaatiokerroin ja määrää selitysaste.

   b) Määrää havaintoja vastaava regressiosuora. Piirrä havaintopisteet ja regressiosuora samaan koordinaatistoon.

   c) Jos jännitysamplitudi on 400 [MPa], niin montako sykliä N komponentti kestää tämän mallin mukaan?

KÄÄNNÄ

Kaavoja

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \backslash B) = P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$

$f(x) = 1/(b-a),\ E(X) = (a+b)/2,\ Var(X) = (b-a)^2/12$

$f(x) = \alpha\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha x^\beta},\ E(X) = \alpha^{-1/\beta}\Gamma(1+1/\beta),\ Var(X) = \alpha^{-2/\beta}(\Gamma(1+2/\beta) - \Gamma(1+1/\beta)^2)$

$f(x) = \theta e^{-\theta x},\ E(X) = 1/\theta,\ Var(X) = 1/\theta^2$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ E(X) = np,\ Var(X) = np(1-p)$$

$$P(X=k) = \frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}},\ E(X) = n\frac{m}{N},\ Var(X) = \frac{nm(N-m)(N-n)}{N^2(N-1)}$$

$P(X=k) = p(1-p)^{k-1},\ E(X) = 1/p,\ Var(X) = (1-p)/p^2$

$$P(X=k) = \frac{a^k}{k!}e^{-a},\ E(X) = a,\ Var(X) = a$$

$$\frac{(\bar{x}-\bar{y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}};\ \frac{(\bar{x}-\bar{y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}\sqrt{\frac{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2}{n+m-2}}};\ \frac{(\bar{x}-\bar{y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{s_x^2}{n} + \frac{s_y^2}{m}}}$$

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{(f_i - np_i)^2}{np_i} \sim \chi^2_{k-1};\ \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{(a_i - n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i} + \frac{(b_i - m\hat{p}_i)^2}{m\hat{p}_i} \right) \sim \chi^2_{k-1},$$

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} \frac{(f_{ij} - n\hat{p}_i\hat{q}_j)^2}{n\hat{p}_i\hat{q}_j} \sim \chi^2_{(k-1)(l-1)};\ \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1};\ \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}}\sqrt{S_{yy}}};\ S_{xy} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y});\ S_{xx} = (n-1)s_x^2;$$

$$y = ax + b;\quad a = \frac{S_{xy}}{S_{xx}};\quad b = \overline{y} - a\overline{x};\quad \frac{\overline{x}_i - \overline{x}_j}{\sqrt{(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j})\frac{SS_W}{n-k}}};$$

$$SS_B = \sum_{i=1}^{k} n_i(\overline{x}_i - \overline{x})^2;\ SS_W = \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)s_i^2;\ \frac{SS_B/(k-1)}{SS_W/(n-k)} \sim F(k-1, n-k).$$