Tilastomatematiikka

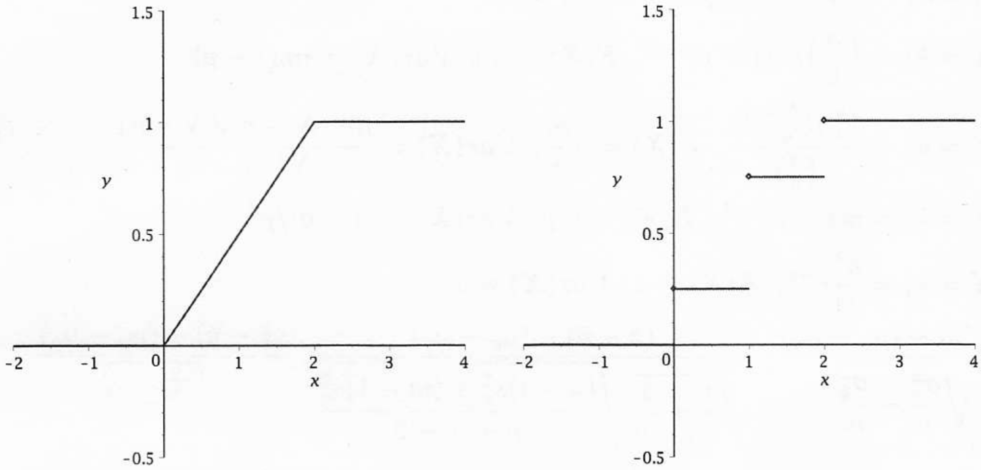
1. välikoe 23.02.2013

1. Heitetään 2 kertaa virheetöntä kolikkoa. Tarkastellaan tapahtumia $A ='' 1.$ heitto on kruuna'', $B =''$ molemmat heitot ovat samoja'' ja $C =''$ molemmat ovat kruunia''.

   a) Määrää todennäköisyydet $P(A \cap B)$ ja $P(A \cap C)$.

   b) Määrää todennäköisyys $P(A|B)$.

   c) Ovatko tapahtumat A ja B riippumattomia? Ovatko tapahtumat A ja C riippumattomia? Perustele vastauksesi.



(a) Kertymäfunktio (b) Kertymäfunktio

Kuva 1: Satunnaismuuttujien kertymäfunktioita.

2. a) Kuvaan 1 on piirretty eräiden satunnaismuuttujien kertymäfunktioita. Totea kummassakin tapauksessa perustellen, onko kyseessä diskreetin vai jatkuvan satunnaismuuttujan kertymäfunktio. Mitä voit sanoa kyseisten satunnaismuuttujien saamista arvoista?

   b) Laske haluamasi satunnaismuuttujan kertymäfunktio ja piirrä sen kuvaaja.

3. Konepaja valmistaa laakereita, joiden läpimitta on normaalijakautunut satunnaismuuttuja parametrein $\mu = 1$ ja $\sigma = 0.002$. Ostajan spesifikaatio vaatii, että läpimitan tulee olla 1.000 ± 0.003.

   a) Kuinka suuri osa laakereista ei täytä ostajan spesifikaatiota?

   b) Jos laakereiden valmistaja pystyy säätämään valmistusprosessia niin, että hajontaa σ voidaan pienentää, niin millä parametrin σ arvolla laakereista korkeintaan 1 prosentti ei täytä ostajan spesifikaatiota?

4. Olkoon Y_n erään osakkeen hinta vuoden n. päivänä. Oletetaan, että hinnan muutokset $X_n = Y_{n+1} - Y_n$ ovat riippumattomia, normaalijakautuneita satunnaismuuttujia, joilla on sama odotusarvo $\mu = 0$ ja varianssi $\sigma^2 = \frac{1}{4}$, ja että hinta vuoden alussa on $Y_1 = 100$.

   a) Laske osakkeen hinnan odotusarvo ja varianssi vuoden lopussa.

   b) Millä todennäköisyydellä osakkeen hinta vuoden lopussa on välillä $[90, 110]$?

KÄÄNNÄ

Kaavoja

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$P(A\backslash B)=P(A\cap\bar{B})=P(A)-P(A\cap B)$$
$$P(\bar{A})=1-P(A)$$
$$P(A|B)=P(A\cap B)/P(B)$$
$$f(x)=1/(b-a),\ E(X)=(a+b)/2,\ Var(X)=(b-a)^2/12$$
$$f(x)=\frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta},\ E(X)=\alpha\beta,\ Var(X)=\alpha\beta^2$$
$$f(x)=\theta e^{-\theta x},\ E(X)=1/\theta,\ Var(X)=1/\theta^2$$
$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\ E(X)=np,\ Var(X)=np(1-p)$$
$$P(X=k)=\frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}},\ E(X)=n\frac{m}{N},\ Var(X)=\frac{nm(N-m)(N-n)}{N^2(N-1)}$$
$$P(X=k)=p(1-p)^{k-1},\ E(X)=1/p,\ Var(X)=(1-p)/p^2$$
$$P(X=k)=\frac{a^k}{k!}e^{-a},\ E(X)=a,\ Var(X)=a$$
$$\frac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}+\frac{\sigma_y^2}{m}}};\ \frac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\sqrt{\frac{(n-1)s_x^2+(m-1)s_y^2}{n+m-2}}};\ \frac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\frac{s_x^2}{n}+\frac{s_y^2}{m}}}$$
$$\sum_{i=1}^{k}\frac{(f_i-np_i)^2}{np_i}\sim\chi^2,\ k-1;\ \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{(a_i-n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i}+\frac{(b_i-m\hat{p}_i)^2}{m\hat{p}_i}\right)\sim\chi^2,\ k-1,$$
$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\frac{(f_{ij}-n\hat{p}_i\hat{q}_j)^2}{n\hat{p}_i\hat{q}_j}\sim\chi^2,\ (k-1)(l-1);$$
$$r=\frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}}\sqrt{S_{yy}}};\ S_{xy}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y});\ S_{xx}=(n-1)s_x^2;$$
$$y=ax+b;\ a=\frac{S_{xy}}{S_{xx}};\ b=\overline{y}-a\overline{x};$$
$$SS_B=\sum_{i=1}^{k}n_i(\overline{x}_i-\overline{x})^2,\ SS_W=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\overline{x}_i)^2,\ \frac{SS_B/(k-1)}{SS_W/(n-k)}\sim F(k-1,n-k).$$