# MATRIISIALGEBRA

Loppukoe 19.1.2023 VÄLIVAIHEET JA PERUSTELUT NÄKYVIIN, KIITOS!

1. Etsi matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

käänteismatriisi. Käytä vaakarivimuunnoksia. Määrää käänteismatriisin avulla yhtälöryhmän

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = -2 \\ 3x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

ratkaisu. **Huom.** Muut ratkaisutavat kuin edellä mainittu antavat 0 pistettä!
**Ratk.** Muodostetaan matriisi $(A \mid I)$, joka saatetaan vaakarivimuunnoksin muotoon $(I \mid A^{-1})$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} {}^{-2}_{+}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} {}^{+}_{2}\ {}_{1} \mid -1 \quad \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} {}^{+}_{-\frac{2}{3}} \mid \tfrac{1}{3}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Käänteismatriisi on $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. (4p)

Yhtälöryhmä matriisimuodossa: $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eli

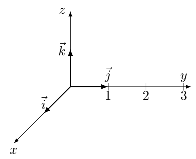
$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Silloin $A^{-1}A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

eli $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Siis $x_1 = 3$, $x_2 = -3$ ja $x_3 = 4$. (2p)

2. a) Vektorijoukko $S = \{(0,1,0,0),(1,0,1,0),(0,1,0,2),(1,0,2,0)\}$ on lineaarisen vektoriavaruuden $\mathbb{R}^4$ kanta. Vektorin $\vec{u}$ koordinaatit kannassa $S$ ovat $3, 2, 4$ ja $-1$. Määrää vektorin $\vec{u}$ koordinaatit luonnollisessa kannassa.

b) Kuvankäsittelyssä kierto ja venytys ovat lineaarisia muunnoksia. Muodosta muunnoksen (kannalta $E = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ kannalle $E$) matriisi, kun kuvaa aluksi venytetään $j$-akselin suunnassa 4 kertaiseksi, sen jälkeen kierretään kulman $\pi$ verran $i$-akselin ympäri myötäpäivään (katsottuna $i$-akselin positiiviselta puoliakselilta origoon päin) ja lopuksi kierretään kulman $\frac{\pi}{2}$ verran $k$-akselin ympäri vastapäivään (katsottuna $k$-akselin positiiviselta puoliakselilta origoon päin).




**Ratk. a)** Nyt

$$\begin{aligned} \vec{u} &= 3(0,1,0,0) + 2(1,0,1,0) + 4(0,1,0,2) + (-1)(1,0,2,0) \quad = (1,7,0,8) \\ &= 1(1,0,0,0) + 7(0,1,0,0) + 0(0,0,1,0) + 8(0,0,0,1) \end{aligned}$$

Vektorin $\vec{u}$ koordinaatit luonnollisessa kannassa ovat $1, 7, 0$ ja $8$.

**b)** Venytysmatriisi:$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Kierto 1. : ($x$-akselin) $\vec{i}$-akselin ympäri myötäpäivään $\pi$:n verran katsottuna $\vec{i}$-akselin positiiviselta puolelta.

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Kierto 2.: ($z$-akselin) $\vec{k}$-akselin ympäri vastapäivään $\frac{\pi}{2}$:n verran katsottuna $\vec{k}$-akselin positiiviselta puolelta.

$$K_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Koko muunnoksen matriisi: $K_2 K_1 V = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3. Laske matriisin

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -16 & 8 \\ -4 & -1 & -4 \\ -4 & 8 & -13 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ja kaikki ominaisvektorit.

**Ratk.**

$$\begin{aligned}
|A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} -\lambda - 1 & -16 & 8 \\ -4 & -\lambda - 1 & -4 \\ -4 & 8 & -\lambda - 13 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -\lambda - 1 & -16 & 8 \\ 0 & -\lambda - 9 & \lambda + 9 \\ -4 & 8 & -\lambda - 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda - 1 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & \lambda + 9 \\ -4 & -\lambda - 5 & -\lambda - 13 \end{vmatrix} \\
&= -(\lambda + 9) \begin{vmatrix} -\lambda - 1 & -8 \\ -4 & -\lambda - 5 \end{vmatrix} \\
&= -(\lambda + 9)[(-\lambda - 1)(-\lambda - 5) - 32] \\
&= -(\lambda + 9)\big(\lambda^2 + 6\lambda - 27\big)
\end{aligned}$$

Ominaisarvoille $\lambda$ on $|A - \lambda I| = 0$, eli $-(\lambda + 9)\big(\lambda^2 + 6\lambda - 27\big) = 0$
Yhtälön ratkaisut, eli $A$:n ominaisarvot ovat $\lambda_{12} = -9$, $\lambda_3 = 3$.
Määrätään ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit.
Ominaisarvoa $\lambda_{12} = -9$ vastaavat ominaisvektorit saadaan yhtälöryhmästä
$A\vec{x} = -9\vec{x}$, missä $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$.
Yhtälöryhmä voidaan kirjoittaa muodossa

$$[A - (-9)I] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ eli}$$

$$\begin{pmatrix} -1 - (-9) & -16 & 8 \\ -4 & -1 - (-9) & -4 \\ -4 & 8 & -13 - (-9) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Laajennettu kerroinmatriisi:

$$\begin{pmatrix} -1 - (-9) & -16 & 8 & 0 \\ -4 & -1 - (-9) & -4 & 0 \\ -4 & 8 & -13 - (-9) & 0 \end{pmatrix}$$

Koska nollasarake ei muutu vaakarivialkeismuunnoksissa, voidaan se jättää pois.

$$\begin{pmatrix} 8 & -16 & 8 \\ -4 & 8 & -4 \\ -4 & 8 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vastaava yhtälöryhmä: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

Ainoasta yhtälöstä voidaan ratkaista $x_1$ ( tai $x_2$ tai $x_3$, mutta vain yksi).
Siis $x_1 = 2x_2 - x_3$.
Valitaan $x_2 = s \in \mathbb{C}$, ja $x_3 = t \in \mathbb{C}$. Silloin $x_1 = 2s - t$.
Ominaisarvoa $-9$ vastaavat ominaisvektorit:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s - t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; s, t \in \mathbb{C}, (s, t) \neq (0, 0).$$

Samalla tavalla saadaan ominaisarvoa $\lambda_3 = 3$ vastaavat ominaisvektorit yhtälöryhmästä: $A\vec{x} = 3\vec{x}$.
Kuten edellä

$$
\begin{pmatrix} -1-3 & -16 & 8 \\ -4 & -1-3 & -4 \\ -4 & 8 & -13-3 \end{pmatrix}
\sim
\begin{pmatrix} -4 & -16 & 8 \\ -4 & -4 & -4 \\ -4 & 8 & -16 \end{pmatrix}
\begin{array}{|l} \times \frac{1}{4} \\ \times (-\frac{1}{4}) \\ \times \frac{1}{4} \end{array}
\sim
\begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}
\begin{array}{l} \phantom{+} \quad {}^{-1} \\ + \\ + \end{array}
$$

$$
\sim
\begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & -6 \end{pmatrix}
\begin{array}{l} | \times (-1) \\ {}^{2} \\ + \end{array}
\sim
\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Vastaava yhtälöryhmä:

$$
\begin{cases} x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & = & 0. \end{cases}
$$

Alimmasta yhtälöstä saadaan $x_2 = x_3$. Sijoittamalla ylempään saadaan
$x_1 = -4x_2 + 2x_3 = -4x_3 + 2x_3 = -2x_3$.
Valitaan $x_3 = s \in \mathbb{C}$. Silloin $x_1 = -2s$ ja $x_2 = s$.
Ominaisarvoa 3 vastaavat ominaisvektorit:
$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s \\ s \\ s \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad s \in \mathbb{C}, s \neq 0.$

4. a) Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Laske Cayley-Hamiltonin lauseen avulla $A^4$.

b) Matriisit $A, B, C, D$ ja $F$ ovat $n \times n$ matriiseja, joille $AB = BC$, matriisi $B$ on säännöllinen, ja matriisi $C = D + F$, missä $D = diag(1, 2, 3, \ldots, n)$, ja $F = (f_{ij})$, missä $f_{ij} = \begin{cases} ij & , \text{kun } j > i \\ 0 & , \text{muualla} \end{cases}$.

Määrää matriisin $A$ determinantti.

**Ratk. a)** Nyt

$\det(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2.$

Cayley-Hamilton: $A^2 - 3A + 2I = O_{2\times 2}$. Siis $A^2 = 3A - 2I$.

Silloin $A^3 = A(3A - 2I) = 3A^2 - 2A = 3(3A - 2I) - 2A = 7A - 6I$.

Siis $A^4 = AA^3 = A(7A - 6I) = 7A^2 - 6A = 7(3A - 2I) - 6A = 15A - 14I$,

eli $A^4 = 15\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - 14\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -15 & 16 \end{pmatrix}$.

**b)** Koska $B$ on säännöllinen, niin $B$:llä on olemassa käänteismatriisi. Silloin $\det(B) \neq 0$, ja $\det(B^{-1}) = \frac{1}{\det(B)}$.

Koska $AB = BC$, niin $ABB^{-1} = BCB^{-1}$, eli $A = BCB^{-1}$. Silloin $\det(A) = \det(BCB^{-1}) = \det(B)\det(C)\det(B^{-1}) = \det(B)\det(C)\frac{1}{\det(B)} = \det(C)$.

Määrätään $\det(C)$:

Nyt

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & \cdots & (n-1) & n \\ 0 & 0 & 6 & 8 & \cdots & 2(n-1) & 2n \\ 0 & 0 & 0 & 12 & \cdots & 3(n-1) & 3n \\ & . & . & . & & & \\ 0 & & \cdots & & & 0 & (n-1)n \\ 0 & & \cdots & & & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ja

$$C = D + F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & (n-1) & n \\ 0 & 2 & 6 & 8 & \cdots & 2(n-1) & 2n \\ 0 & 0 & 3 & 12 & \cdots & 3(n-1) & 3n \\ & . & . & . & & & \\ 0 & & \cdots & & & n-1 & (n-1)n \\ 0 & & \cdots & & & 0 & n \end{pmatrix},$$

Koska $C$ on yläkolmiomatriisi, niin $\det(C)$ on matriisin $C$ diagonaalialkioiden tulo. Silloin $\det(A) = \det(C) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n = n!$ .