MATRIISIALGEBRA

Loppukoe 19.1.2023 VÄLIVAIHEET JA PERUSTELUT NÄKYVIIN, KIITOS!

1. Etsi matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

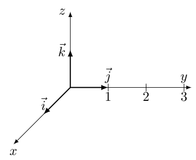
käänteismatriisi. Käytä vaakarivimuunnoksia. Määrää käänteismatriisin avulla yhtälöryhmän

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = -2 \\ 3x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

ratkaisu. **Huom.** Muut ratkaisutavat kuin edellä mainittu antavat 0 pistettä!

2. a) Vektorijoukko $S = \{(0,1,0,0),(1,0,1,0),(0,1,0,2),(1,0,2,0)\}$ on lineaarisen vektoriavaruuden $\mathbb{R}^4$ kanta. Vektorin $\vec{u}$ koordinaatit kannassa S ovat $3, 2, 4$ ja -1. Määrää vektorin $\vec{u}$ koordinaatit luonnollisessa kannassa.

   b) Kuvankäsittelyssä kierto ja venytys ovat lineaarisia muunnoksia. Muodosta muunnoksen (kannalta $E = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ kannalle E) matriisi, kun kuvaa aluksi venytetään j-akselin suunnassa 4 kertaiseksi, sen jälkeen kierretään kulman π verran i-akselin ympäri myötäpäivään (katsottuna i-akselin positiiviselta puoliakselilta origoon päin) ja lopuksi kierretään kulman $\frac{\pi}{2}$ verran k-akselin ympäri vastapäivään (katsottuna k-akselin positiiviselta puoliakselilta origoon päin).



3. Laske matriisin

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -16 & 8 \\ -4 & -1 & -4 \\ -4 & 8 & -13 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ja kaikki ominaisvektorit.

4. a) Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Laske Cayley-Hamiltonin lauseen avulla A^4.

   b) Matriisit A, B, C, D ja F ovat $n \times n$ matriiseja, joille $AB = BC$, matriisi B on säännöllinen, ja matriisi $C = D + F$, missä $D = diag(1, 2, 3, \ldots, n)$, ja $F = (f_{ij})$, missä $f_{ij} = \begin{cases} ij & , \text{kun } j > i \\ 0 & , \text{muualla} \end{cases}$.

   Määrää matriisin A determinantti.

Kaavoja:

$ax^2 + bx + c = 0, \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

$A_{m\times n} = (a_{ik}), B_{n\times p} = (b_{kj}), \ AB = (c_{ij}), \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$

$$D = T^{-1}AT$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda},$$

$$\frac{\vec{y}_k^T \cdot \vec{y}_{k+1}}{\vec{y}_k^T \cdot \vec{y}_k} = \lambda_1^{(k)}$$

$$\|A\|_{F_r} = \sqrt{\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2}$$

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

$$\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$f(A) = d_0 I + d_1 A + d_2 A^2 + \cdots + d_{n-1}A^{n-1}$$

$$\vec{q}_1 = \frac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_1\|}, \quad \vec{q}_k = \frac{\vec{v}_k}{\|\vec{v}_k\|}, \ k = 2, 3, \ldots, n,$$

$$\vec{v}_k = \vec{a}_k - (\vec{q}_1^{\mathrm{T}}\vec{a}_k)\vec{q}_1 - \cdots - (\vec{q}_{k-1}^{\mathrm{T}}\vec{a}_k)\vec{q}_{k-1}, \ k = 2, 3, \ldots, n.$$