031023P Tietotekniikan matematiikka

1. välikoe 21.9.2023

1. **a)** Oheisena on lauseen $A \diamond B$ totuustaulu. Keksi lauseen $A \diamond B$ kanssa yhtäpitävä lause, missä on käytetty vain toimituksia $\to$ ja $'$ ja osoita lauseen $A \diamond B$ ja keksimäsi lauseen yhtäpitävyys totuustaulujen avulla.(3p)

A	B	A ⋄ B
T	T	E
T	E	E
E	T	T
E	E	E

b) Tutki resoluutiomenettelyllä, onko voimassa

$$\{A \to B, C \to D, (B \vee D) \to E, E'\} \models (A' \wedge C')$$

Perustele vastauksesi. Merkitse tarkasti näkyviin resoluutiomenettelyn eri vaiheet. (3p)

Ratk. a) Totuustaulusta $A \diamond B = A' \wedge B$. Siis $A \diamond B = A' \wedge B = (A \vee B')' = (A' \to B')'$ (2p)

A	B	A'	B'	$A' \to B'$	$(A' \to B')'$	$A \diamond B$
T	T	E	E	T	E	E
T	E	E	T	T	E	E
E	T	T	E	E	T	T
E	E	T	T	T	E	E

Siis $A \diamond B = (A' \to B')'$ (myös $A \diamond B = (B \to A)'$). (1p)

b) Vastaava päättely: $\{A \to B, C \to D, (B \vee D) \to E, E', (A' \wedge C')'\} \models 0$.

Konjunktit: $A \to B = A' \vee B = C_1$,

$C \to D = C' \vee D = C_2$

$(B \vee D) \to E = (B \vee D)' \vee E = (B' \wedge D') \vee E = (B' \vee E) \wedge (D' \vee E)$, joten $C_3 = B' \vee E$ ja $C_4 = D' \vee E$.

$E' = C_5$

$(A' \wedge C')' = A \vee C = C_6$. (1p)

Vastaava päättely: $\{C_1, C_2, \ldots, C_6\} \models 0$.

C_2 ja C_4: $C' \vee E = C_7$,

C_6 ja C_7: $A \vee E = C_8$,

C_1 ja C_8: $B \vee E = C_9$,

C_3 ja C_9: $E = C_{10}$,

C_5 ja C_{10}: 0

Resoluutiomenettely pysähtyy ja aina epätosi lause saatiin pääteltyä. Siis

$\{C_1, C_2, \ldots, C_6\} \models 0$, eli

$\{A \to B, C \to D, (B \vee D) \to E, E'\} \models (A' \wedge C')$. (2p)

2. **a)** Olkoon perusjoukkona U kaikki maailman ihmiset. Eräs perusjoukon alkio on W: "Waltteri"ja toinen perusjoukon alkio on M:"Mikkeli". Lisäksi käytetään seuraavia predikaatteja:

$Ke(x)$ = "x on kansanedustaja", $K(x)$ = "x katuu tekojaan.", $A(x, y)$ = "x pyytää anteeksi y:ltä.",

Kirjoita lauseet a1)-a3) symbolimuotoon (1p kukin).

a1) "Yksikään kansanedustaja ei kadu tekojaan."

a2) "Waltteri ei pyydä anteeksi kaikilta tekojaan katuvilta kansanedustajilta."

a3) "Mikkeli tai Waltteri katuvat tekojaan täsmälleen silloin kun toinen heistä ei ole enää kansanedustaja."

b) Olkoon perusjoukko $U = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Olkoon $P(x, y)$ predikaatti "$y - x = y + x^2$". Päättele lauseiden b1), b2) ja b3) totuusarvot (ja perustele tarkasti se miksi totuusarvo on esittämäsi). (1p kukin)

b1) $\forall x \forall y (P(2, 0) \to P(x, y))$ b2) $\forall y \exists x P(x, y)$, b3) $\forall x \exists y P(x, y)$.

Ratk.a) a1) $\forall x[Ke(x) \to K(x)']$, **a2)** $\exists x[Ke(x) \wedge K(x) \wedge A(W, x)']$

a3) $(K(W) \vee K(M)) \leftrightarrow (Ke(W)' \vee Ke(M)')$.

Ratk b) b1) $P(2, 0)$, eli $0-2 = 0+2^2$ on epätosi, joten $P(2, 0) \to P(x, y)$ on tosi kaikilla perusjoukon alkioilla x ja y. Siis $\forall x \forall y (P(2, 0) \to P(x, y))$ on tosi.

b2) $P(0, y)$ eli $y - 0 = y + 0^2$ on tosi kaikilla perusjoukon alkioilla y, eli $\exists x P(x, y)$ on tosi kaikilla perusjoukon alkioilla y. Siis $\forall y \exists x P(x, y)$ on tosi.

b3) $P(1, y)$ eli $y - 1 = y + 1^2$ eli $-1 = 1$ on epätosi kaikilla perusjoukon alkioilla y. Siis $\exists y P(1, y)$ on epätosi. Siis $\forall x \exists y P(x, y)$ on epätosi.

3. **a)** Olkoon $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ ja $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Määritellään joukon $\mathbb{Z}^+$ suhde R seuraavasti:

$$(a, b) \in R \text{ täsmälleen silloin kun } \frac{a}{b} = 2^n \text{ jollakin kokonaisluvulla } n \in \mathbb{Z}.$$

a1) Onko voimassa: $(64, 4) \in R$? (1p)

a2) Onko R ekvivalenssisuhde? Jos on, niin osoita se ja määrää ekvivalenssiluokka $[3]_R$. Jos R ei ole ekvivalenssisuhde, niin osoita se. (2p)

b) Kun 16-järjestelmän luvut ovat suuruusjärjestyksessä 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F ja luku $X = (A94F1)_{16}$ ja $Y = (1F8910)_{16}$, niin laske erotus $Y - X$ käyttäen vähennyslaskua ilman lainaamista. Laskut on tehtävä 16-järjestelmässä. Kaikki laskut on esitettävä. (3p)

Ratk. a) a1) $\frac{64}{4} = \frac{2^6}{2^2} = 2^4$, eli $(64, 4) \in R$.

a2) (i) $\frac{a}{a} = 1 = 2^0$, joten $(a, a) \in R$ aina kun $a \in \mathbb{Z}^+$. Suhde R on refleksiivinen.

(ii) Jos $(a, b) \in R$, niin $\frac{a}{b} = 2^n$ jollakin $n \in \mathbb{Z}$. Silloin $\frac{b}{a} = 2^{-n}$, eli $(b, a) \in R$. Suhde R on symmetrinen.

(iii)Jos $(a, b) \in R$ ja $(b, c) \in R$, niin $\frac{a}{b} = 2^n$ jollakin $n \in \mathbb{Z}$ ja $\frac{b}{c} = 2^m$ jollakin $m \in \mathbb{Z}$. Silloin $\frac{a}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = 2^n \cdot 2^m = 2^{n+m}$. Siis $(a, c) \in R$. Suhde R on transitiivinen.

Kohtien $(i) - (iii)$ perusteella R on ekvivalenssisuhde. (1p)

$[3] = \{b \in \mathbb{Z}^+ | \quad (b, 3) \in R\} = \{b \in \mathbb{Z}^+ || \quad \frac{b}{3} = 2^n, n \in \mathbb{Z}\} = \{b \in \mathbb{Z}^+ || \quad b = 3 \cdot 2^n\}$ (1p)

$= \{3 \cdot 2^0, 3 \cdot 2^1, 3 \cdot 2^2, 3 \cdot 2^3, \ldots\} = \{3, 6, 12, 24, 48, \ldots\}$

b) $X = (0A94F1)_{16}$

$X^* = FFFFFF - 0A94F1 = F56B0E$, $X^{**} = F56B0E + 1 = F56B0F$ (1p)

$Y + X^{**} = 1F8910 + F56B0F = 114F41F$.

Summassa ylivuoto, joten $Y - X > 0$. Silloin $Y - X = 14F41F$. (2p)

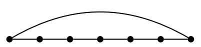
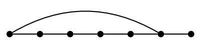
4. **a)** Piirrä kaksi yhtenäistä ei-isomorfista graafia, joissa kummassakin on 7 pistettä ja 7 viivaa. (1p)

b) Onko olemassa 5 pistettä sisältävä graafi, jonka pisteiden asteet ovat $3, 3, 2, 2$ ja 1. Jos graafi on olemassa, niin piirrä graafi. Jos graafia ei ole olemassa, niin perustele miksi ei. (1p)

c) Luku 29 voidaan lausua vain lukuja 5 ja 7 sisältävänä summana, koska $29 = 5 + 5 + 5 + 7 + 7$. Osoita, että jokainen kokonaisluku $n \geq 64$ voidaan lausua vain lukuja 5 ja 7 sisältävänä summana.

Merkitse tarkasti näkyviin matemaattisen induktion vaiheet. (4p)

Ratk. a) Useita ratkaisuja.

$\mathbf{C_7}$:  ja 

b) Graafia ei voi piirtää, koska jokaisessa graafissa on parittoman asteen omaavia pisteitä parillinen määrä.

c) Väite: $n = i \cdot 5 + j \cdot 7$ aina kun $n = 64, 65, 66, \ldots$.

Tod. Matemaattinen induktio.

Merkitään $P(n) : n = i \cdot 5 + j \cdot 7$.

Nyt $P(64)$ on voimassa, sillä $64 = 10 \cdot 5 + 2 \cdot 7$. (1p)

Induktio-oletus: $P(k)$ on voimassa.

Induktioväite: $P(k + 1)$ on voimassa.

Induktioväitteen todistus: Nyt induktio-oletuksen perusteella $k + 1 = i \cdot 5 + j \cdot 7 + 1$ joillakin positiivisilla kokonaisluvuilla i ja j.

(i) Jos $i \geq 4$, niin $k+1 = i \cdot 5 + j \cdot 7 + 1 = (i-4) \cdot 5 + j \cdot 7 + 4 \cdot 5 + 1 = (i-4) \cdot 5 + j \cdot 7 + 3 \cdot 7 = (i-4) \cdot 5 + (j+3) \cdot 7$.

(ii) Jos $i < 4$, niin $j \geq 7$ (koska $k \geq 64$), joten

$k + 1 = i \cdot 5 + j \cdot 7 + 1 = i \cdot 5 + (j - 7) \cdot 7 + 7 \cdot 7 + 1 = i \cdot 5 + (j - 7) \cdot 7 + 50 = i \cdot 5 + (j - 7) \cdot 7 + 10 \cdot 5 = (i + 10) \cdot 5 + (j - 7) \cdot 7$.

Kohtien (i) ja (ii) perusteella $P(k + 1)$ on voimassa. Väite on voimassa induktioperiaatteen perusteella. (3p)