031023P Tietotekniikan matematiikka

1. välikoe 22.9.2022

1. **a)** Oheisena on lauseen $A \,\square\, B$ totuustaulu. Keksi lauseen $(A \to B')'$ kanssa yhtäpitävä lause, missä on käytetty vain toimitusta/yhdistäjää $\square$ ja osoita lauseen $(A \to B')'$ ja keksimäsi lauseen yhtäpitävyys totuustaulujen avulla.(3p)

A	B	A □ B
T	T	E
T	E	T
E	T	E
E	E	E

b) Tutki resoluutiomenettelyllä, onko voimassa

$$\{A \to (B \to C), A \vee D, (E \vee D) \to B\} \models (C' \to E')$$

Perustele vastauksesi. Merkitse tarkasti näkyviin resoluutiomenettelyn eri vaiheet. (3p)

2. **a)** Olkoon perusjoukkona U kaikki maailman ihmiset. Käytetään seuraavia predikaatteja: $S(x)$ = "x on huoltaja.", $H(x, y)$ = "x hoitaa y:tä.", $La(x)$ = "x lakkoilee.", $Li(x)$ = "x haluaa lisää liksaa.", $P(x)$ = "x on potilas". Olkoon lisäksi eräs perusjoukon alkio Sa: "Sari".

Kirjoita lauseet a1)-a3) symbolimuotoon (1p kukin).

a1) "Jokainen lisää liksaa haluava huoltaja lakkoilee."

a2) "Lisää liksaa haluava huoltaja Sari hoitaa ainakin yhtä potilasta."

a3) "Ei ole totta, että jokainen lisää liksaa haluava lakkoileva huoltaja hoitaa ainakin yhtä potilasta."

b) Perusjoukko U on kaikkien positiivisten kokonaislukujen muodostama joukko. Joukon U alkio m on **alkuluku**, jos $m > 1$ ja m on jaollinen vain itsellään ja luvulla 1. Alkulukuja ovat esimerkiksi $2, 3, 23, 29, 47, 83$.

Olkoon predikaatti $Q(n)$ = "n on alkuluku". Päättele lauseiden b1), b2) ja b3) totuusarvot (ja perustele tarkasti se miksi totuusarvo on esittämäsi).

b1) $\forall n(Q(n) \wedge Q(n+2))$, (1p)

b2) $\exists n(Q(n) \wedge Q(n+2))$, (1p)

b3) $\forall n(Q(1) \to Q(n))$. (1p)

3. Olkoon joukko $A = \{a, b, c, d\}$. Muodosta sellainen joukon A osittainen järjestys R, että R ei ole jonojärjestys ja R sisältää ainakin 9 paria (x, y), joille $(x, y) \in R$, missä $x, y \in A$. Luettele R:n parit (2p) ja piirrä osittaisen järjestyksen R järjestyskuvio (1p). Määrää osittaisen järjestyksen R minimaaliset ja maksimaaliset alkiot (2p) ja esitä jokin osittaisen järjestyksen R kanssa yhteensopiva jonojärjestys (1p).

4. **a)** Piirrä yksi graafi, joka toteuttaa **kaikki** seuraavat ehdot:

(1) Graafissa on täsmälleen 3 komponenttia ja korkeintaan 11 pistettä.

(2) Graafi sisältää täsmälleen kaksi pistettä joiden aste on 1.

(3) Graafi sisältää aligraafinaan täydellisen graafin K_5.

Määrää piirtämäsi graafin (piirrä erilleen) yhtenäinen indusoitu aligraafi jossa on täsmälleen 4 pistettä. (2p)

b) Osoita matemaattisen induktion avulla, että vähintään 15 opiskelijan joukko voidaan aina jakaa ryhmiin, joissa jokaisessa on 4 tai 5 opiskelijaa.

Merkitse tarkasti näkyviin matemaattisen induktion vaiheet. (4p)

Kaavoja:

Modus Ponens	$\{P, P \to Q\} \models Q$	$[P \wedge (P \to Q)] \to Q$
Modus Tollens	$\{P \to Q, Q'\} \models P'$	$[(P \to Q) \wedge Q'] \to P'$
Konjunktio	$\{P, Q\} \models P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \to (P \wedge Q)$
Yksinkertaistus	$\{P \wedge Q\} \models P, Q$	$[(P \wedge Q) \to P] \wedge [(P \wedge Q) \to Q]$
Additio	$P \models P \vee Q$	$P \to (P \vee Q)$
Ketjusääntö	$\{P \to Q, Q \to W\} \models P \to W$	$[(P \to Q) \wedge (Q \to W)] \to (P \to W)$
Disjunktiivinen syllogismi	$\{P \vee Q, P'\} \models Q$	$[(P \vee Q) \wedge P'] \to Q$