031023P Tietotekniikan matematiikka

1. välikoe 23.9.2021 **Ratkaisut**

1. **a)** Kolme veljestä, Aarne, Bertil ja Calle ovat epäiltyinä isän puolukkamehupullon tyhjentämisestä. Bertil antaa seuraavan lausunnon: "Ei ole totta, että Aarne on syyllinen tai Calle on syytön". Calle lausuu: "Aarne on syyllinen tai Bertil on syyllinen". Käytä alkeislauseita A: "Aarne on syyllinen", B: "Bertil on syyllinen"ja C: "Calle on syyllinen"ja lausu symbolimuodossa yllä olevat lausunnot. (1p)

Pitkän kokemuksen perusteella isä tietää, että molemmat pojat puhuvat totta. Onko mahdollista päätellä edellä olevien lauseiden perusteella kuka tai ketkä tyhjensivät mehupullon? Jos on, niin tee päättely totuustaulujen avulla. Jos ei ole, niin perustele miksi ei. (2p)

b) Tutki resoluutiomenettelyllä, onko voimassa $\{(A \to C) \vee (B \to C)\} \models ((A \wedge B) \to C)$. Merkitse tarkasti näkyviin resoluutiomenettelyn eri vaiheet. (3p)

Ratk. a) Bertilin lausunto: $(A \vee C')'$. Callen lausunto: $A \vee B$. (1p)

A	B	C	C'	$A \vee C'$	$\mathcal{A}_1 = (A \vee C')'$	$\mathcal{A}_2 = A \vee B$	$\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2$
T	T	T	E	T	E	T	E
T	T	E	T	T	E	T	E
T	E	T	E	T	E	T	E
T	E	E	T	T	E	T	E
E	**T**	**T**	E	E	T	T	**T**
E	T	E	T	T	E	T	E
E	E	T	E	E	T	E	E
E	E	E	T	T	E	E	E

Koska molemmat lausunnot ovat totta vain yhdessä tapauksessa, niin pullon tyhjentämiseen Aarne on syytön, mutta Bertil ja Calle ovat syyllisiä. (2p)

b) Vastaava päättely: $\{(A \to C) \vee (B \to C), ((A \wedge B) \to C)'\} \models 0$, missä 0 on aina epätosi lause.

Konjunktit: $(A \to C) \vee (B \to C) = (A' \vee C) \vee (B' \vee C) = A' \vee B' \vee C = C_1$

$((A \wedge B) \to C)' = ((A \wedge B)' \vee C)' = (A \wedge B) \wedge C' = A \wedge B \wedge C'$

Nyt $A = C_2$, $B = C_3$ ja $C' = C_4$.

Vastaava päättely: $\{C_1, C_2, C_3, C_4\} \models 0$ (1p)

C_1 ja C_2: $B' \vee C = C_5$.

C_3 ja C_5: $C = C_6$.

C_4 ja C_6: 0.

Resoluutiomenettely pysähtyy, koska 0 saatiin pääteltyä.

Silloin $\{C_1, C_2, C_3, C_4\} \models 0$, eli myös

$\{(A \to C) \vee (B \to C), ((A \wedge B) \to C)'\} \models 0$

ja siis

$\{(A \to C) \vee (B \to C)\} \models ((A \wedge B) \to C)$. (2p)

2. **a)** Olkoon perusjoukkona U kaikki maailman ihmiset. Käytetään seuraavia predikaatteja:

$V(x)$ = "x vastustaa rokotteita.", $R(x, y)$ = "x haluaa y:n ottavan rokotteen.", $S(x)$ = "x sairastuu.", $M(x)$ = "x muuttaa kantaansa.", ja seuraavaa alkiota perusjoukosta P: "Pekka".

Kirjoita lauseet a1)-a3) merkkimuotoon (1p kukin).

a1) "Jokainen sairastunut rokotteiden vastustaja muuttaa kantaansa."

a2) "Eräs sairastunut rokotteiden vastustaja ei halua Pekan ottavan rokotetta."

a3) "Ei ole totta, että jokainen rokotteiden vastustaja haluaa kaikkien ihmisten ottavan rokotteen."

b) 2-järjestelmän luvut ovat suuruusjärjestyksessä 0 ja 1 ja vastaavasti 16-järjestelmän luvut ovat $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F$. Luku $X = (ABC)_{16}$ ja luku $Y = (DE)_{16}$. Lausu luvut X ja Y 2-järjestelmässä. Käytä alla olevaa muunnostaulukkoa. Laske sen jälkeen erotus $X - Y$ käyttäen vähennyslaskua ilman lainaamista. Laskut on tehtävä 2-järjestelmässä. Kaikki laskut on esitettävä. (3p)

Heksaluvut	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
Binääriluvut	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

Ratk. a) a1) $\forall x((V(x) \land S(x)) \to M(x))$ **a2)** $\exists x(S(x) \land V(x) \land R'(x,P))$ **a3)** $[\forall x(V(x) \to (\forall y R(x,y)))]'$.

b) $X = (ABC)_{16} = (1010\ 1011\ 1100)_2$, $Y = (DE)_{16} = (1101\ 1110)_2$ (1p)

$X - Y = 1010\ 1011\ 1100 - 0000\ 1101\ 1110$,

$Y^* = 1111\ 1111\ 1111 - 0000\ 1101\ 1110\ = 1111\ 0010\ 0001$, (1p)

$Y^{**} = 1111\ 0010\ 0001 + 1 = 1111\ 0010\ 0010$,

$X + Y^{**} = 1010\ 1011\ 1100 + 1111\ 0010\ 0010 = \mathbf{1}\ 1001\ 1101\ 1110$.

Summassa ylivuoto, joten $X - Y > 0$. Silloin $X - Y = 1001\ 1101\ 1110$. (2p)

3. **a)** Olkoon R suhde kokonaislukujen joukossa $\mathbb{Z}$, jolle

$(u,v) \in R$ täsmälleen silloin kun $u + 3v = 4n$ jollakin kokonaisluvulla n.

Osoita, että R on ekvivalenssisuhde joukossa $\mathbb{Z}$ ja määrää suhteen R ekvivalenssiluokat. (4p)

b) Piirrä kaikki 5 pistettä ja korkeintaan 2 viivaa sisältävät ei-isomorfiset graafit. (2p)

Ratk. a) (i) $u + 3u = 4u$ kaikilla $u \in \mathbb{Z}$, joten R on refleksiivinen. (1p)

(ii) Jos $(u,v) \in R$, niin $u+3v = 4n$ jollakin kokonaisluvulla n. Silloin $3(u+3v) = 12n$, eli $3u+v+8v = 12n$. Siis $v + 3u = 12n - 8v = 4(3n - 2v)$. Koska n ja v ovat kokonaislukuja, niin $3n - 2v$ on kokonaisluku, eli $v + 3u = 3m$, siis $(v,u) \in R$. Suhde on symmetrinen.

(iii) Jos $(u,v) \in R$ ja $(v,w) \in R$, niin $u + 3v = 4n$ ja $v + 3w = 4m$ joillakin kokonaisluvuilla n ja m. Silloin $(u + 3v) + (v + 3w) = 4n + 4m$, eli $u + 3w = 4n + 4m - 4v$. Siis $u + 3w = 4(n + m - v)$. Koska luvut n, m ja v ovat kokonaislukuja, niin $n + m - v$ on kokonaisluk, eli $(u,w) \in R$. Suhde on transitiivinen. Kohtien (i)-(iii) perusteella R on ekvivalenssisuhde. (2p)

Ekvivalenssiluokat: Koska R on symmetrinen, niin $[u]_R = \{v|(u,v) \in R\} = \{v|(v,u) \in R\}$. Silloin

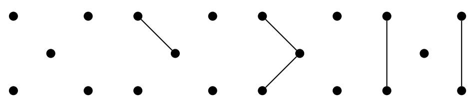
$[0]_R = \{u|(u,0) \in R\} = \{u|u + 3 \cdot 0 = 4n, n \in \mathbb{Z}\} = \{u|u = 4n, n \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots,-4,0,4,8,12,\ldots\}$

$[1]_R = \{u|(u,1) \in R\} = \{u|u+3\cdot 1 = 4n, n \in \mathbb{Z}\} = \{u|u = 4n-3, n \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots,-3,1,5,9,13,17,\ldots\}$

$[2]_R = \{u|(u,2) \in R\} = \{u|u + 3 \cdot 2 = 4n, n \in \mathbb{Z}\} = \{u|u = 4n - 6 = 4m - 2, m \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots,-2,2,6,10,14,18,\ldots\}$

$[3]_R = \{u|(u,3) \in R\} = \{u|u + 3 \cdot 3 = 4n, n \in \mathbb{Z}\} = \{u|u = 4n - 9 = 4m - 1, m \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots,-1,3,7,11,15,19,\ldots\}$ (1p)

b)



(2p)

4. **a)** Piirrä yksi graafi, joka toteuttaa **kaikki** seuraavat ehdot:

(1) Graafissa on täsmälleen 3 komponenttia ja korkeintaan 12 pistettä.

(2) Graafi sisältää täsmälleen yhden pisteen, jonka aste on 4, ja täsmälleen kolme pistettä joiden aste on 3.

(3) Graafi sisältää aligraafinaan täydellisen graafin K_4.

Määrää piirtämäsi graafin (piirrä erilleen) yhtenäinen indusoitu aligraafi jossa on täsmälleen 3 pistettä. (2p)

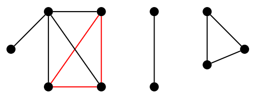
b) Olkoon $G = (\{v_1, v_2 \ldots, v_n\}, E)$ graafi, ja M sen vieruspistematriisi, missä matriisin i:nnellä rivillä ja j:nnellä sarakkeella oleva luku $M_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, jos } v_i v j \in E \\ 0 & \text{, jos } v_i v j \notin E \end{cases}$ aina kun $i,j = 1,2,3\ldots,n$.

Osoita matemaattisen induktion avulla tulos:

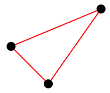
Matriisin M^m, $m = 1,2,\ldots$ i:nnellä rivillä ja j:nnellä sarakkeella oleva luku M_{ij}^m on graafin G m:n pituisten kulkujen $v_i \overset{m}{\to} v_j$ lukumäärä aina kun $i,j \in \{1,2,3,\ldots,n\}$.

Merkitse tarkasti näkyviin matemaattisen induktion vaiheet. (4p)

Ratk. a) Eräs ratkaisu:

G : 

Yhtenäinen indusoitu aligraafi jossa on täsmälleen 3 pistettä:



(2p)

b) Matemaattinen induktio m:n suhteen.

Tapaus m**=1:** Nyt $M_{ij} = 1$, jos v_i ja v_j ovat vieruspisteitä, muulloin $M_{ij} = 0$. Siis tulos on voimassa, kun $m = 1$. (1p)

Induktio-oletus: Tulos on voimassa, kun $m = k$.

Tarkastellaan tapausta $M = k + 1$. Nyt $M^{k+1} = M^k M$. (1p)

Matriisien kertolasku:

$M_{ij}^{k+1} = \sum_{l=1}^{n} M_{il}^k M_{lj}$, aina kun $i, j \in \{1, 2, 3 \ldots, n\}$

Matriisin M_{ij}^{k+1} on M^k i:nnen rivin ja matriisin M j:nnen sarakkeen pistetulo.

Matriisin M j:nnen sarakkeen alkio on 1 täsmälleen silloin, kun vastaava piste on pisteen v_j naapuri ja muulloin alkio on 0.

$$M_{ij}^{k+1} = \sum_{M_{lj} \neq 0} M_{il}^k$$

$$M_{ij}^{k+1} = \sum_{M_{lj} \neq 0} M_{il}^k$$

Induktio-oletus: M_{il}^k on k:n pituisten erilaisten kulkujen $v_i \xrightarrow{k} v_l$ lukumäärä.

$M_{ij}^{k+1} = \sum\limits_{M_{lj} \neq 0} M_{il}^k$ on erilaisten k:n pituisten kulkujen määrä v_i:ltä v_j:n naapureille,

$M_{ij}^{k+1} = \sum\limits_{M_{lj} \neq 0} M_{il}^k$ on $k + 1$:n pituisten kulkujen $v_i \xrightarrow{k+1} v_j$ lukumäärä.

Väite seuraa induktioperiaatteesta. (2p)

Kaavoja:

Modus Ponens	$\{P, P \to Q\} \vDash Q$	$[P \wedge (P \to Q)] \to Q$
Modus Tollens	$\{P \to Q, Q'\} \vDash P'$	$[(P \to Q) \wedge Q'] \to P'$
Konjunktio	$\{P, Q\} \vDash P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \to (P \wedge Q)$
Yksinkertaistus	$\{P \wedge Q\} \vDash P, Q$	$[(P \wedge Q) \to P] \wedge [(P \wedge Q) \to Q]$
Additio	$P \vDash P \vee Q$	$P \to (P \vee Q)$
Ketjusääntö	$\{P \to Q, Q \to W\} \vDash P \to W$	$[(P \to Q) \wedge (Q \to W)] \to (P \to W)$
Disjunktiivinen syllogismi	$\{P \vee Q, P'\} \vDash Q$	$[(P \vee Q) \wedge P'] \to Q$