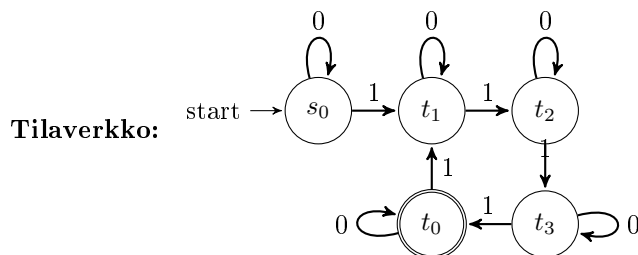


TIETOTEKNIIKAN MATEMATIIKKA

Harjoitus 9 syksy 2021. Ratkaisut.

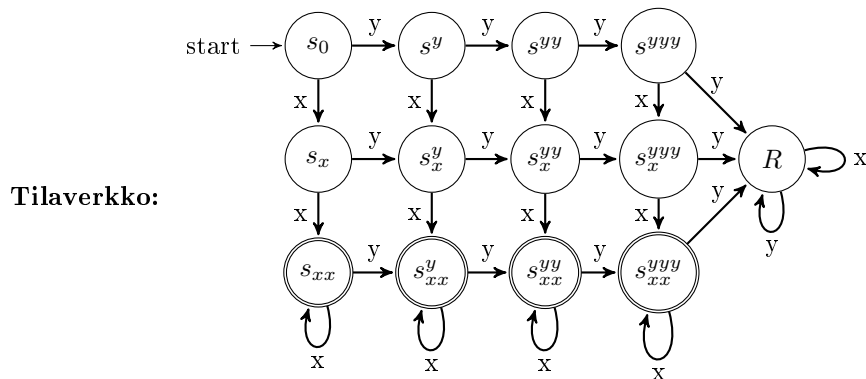
1. Rakenna äärellinen deterministinen automaatti, joka hyväksyy 0,1-jonoista täsmälleen ne, joissa on 1:iä nelosella jaollinen määrä ($\neq 0$) ja hylkää muut.

Ratk. Tilalla muistetaan bittien 1 määrän 4:lla jakamisen osamäärä.



2. Määrää äärellinen deterministinen automaatti, joka hyväksyy kaikki ne aakkoston $\{x, y\}$ sanat joissa esiintyy ainakin kaksi x kirjainta ja korkeintaan kolme y kirjainta, ja hylkää muut sanat. Piirrä automaatin tilaverkko ja selitä syötöt ja tilat.

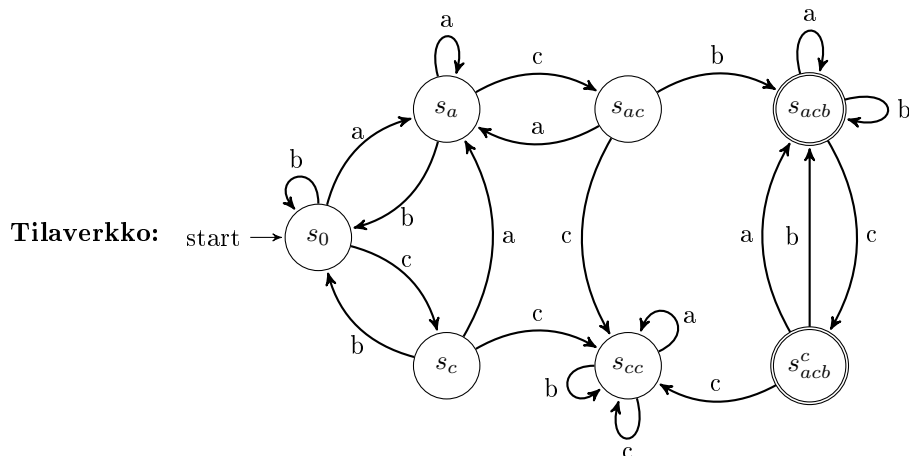
Ratk. Syötöt: $\{x, y\}$. Tilalla muistetaan montako merkkiä x ja montako merkkiä y on luettu ja onko virhe tapahtunut.



3. Tarkastellaan aakkoston $\{a, b, c\}$ kieltä L , joka sisältää täsmälleen kaikki sellaiset aakkoston sanat, joissa esiintyy osasanana sana acb ja joissa ei esiinny osananana sanaa cc . Toisin sanoen $L = \{w \mid w \in \{a, c, b\}^*, acb \text{ on sanan } w \text{ osana ja } cc \text{ ei ole sanan } w \text{ osana}\}$.

Määrää äärellinen deterministinen automaatti, joka hyväksyy kaikki kielen L sanat ja hylkää muut sanat. Piirrä automaatin tilaverkko ja selitä syötöt ja tilat.

Ratk. Syötöt: $\{a, b, c\}$. Tilalla muistetaan missä kohtaa osanan acb lukemista ollaan ja onko kirjain c tehty edellisenä kirjaimena. Esimerkiksi tilassa s_{ac} on luettu viimeiseksi sana ac .

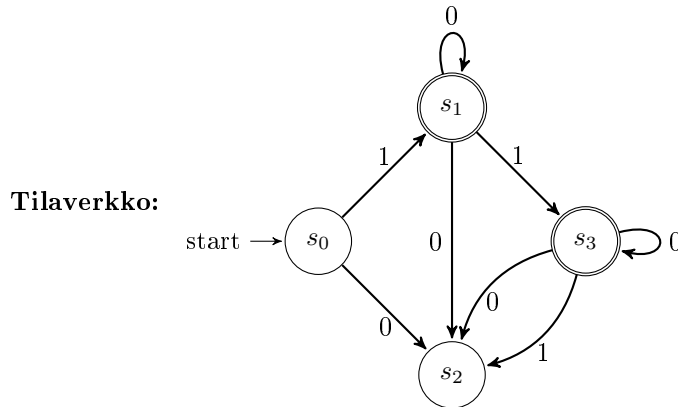


4. Tutkitaan alla olevalla taulukolla esitettyä äärellistä automaattia, missä alkutila on s_0 ja lopputilojen joukko $\{s_1, s_3\}$. Määrää kieli/sanat, jotka automaatti hyväksyy. Laadi äärellinen deterministinen automaatti, joka hyväksyy täsmälleen saman kielen kuin taulukon äärellinen epä-deterministinen automaatti määräämällä laskien deterministisen automaatin tilat ja lopulliset tilat (hyväksymistilat) ja piirtämällä deterministisen automaatin tilaverkko, missä näkyy mistä epä-deterministisen automaatin tiloista deterministisen automaatin tilat koostuvat.

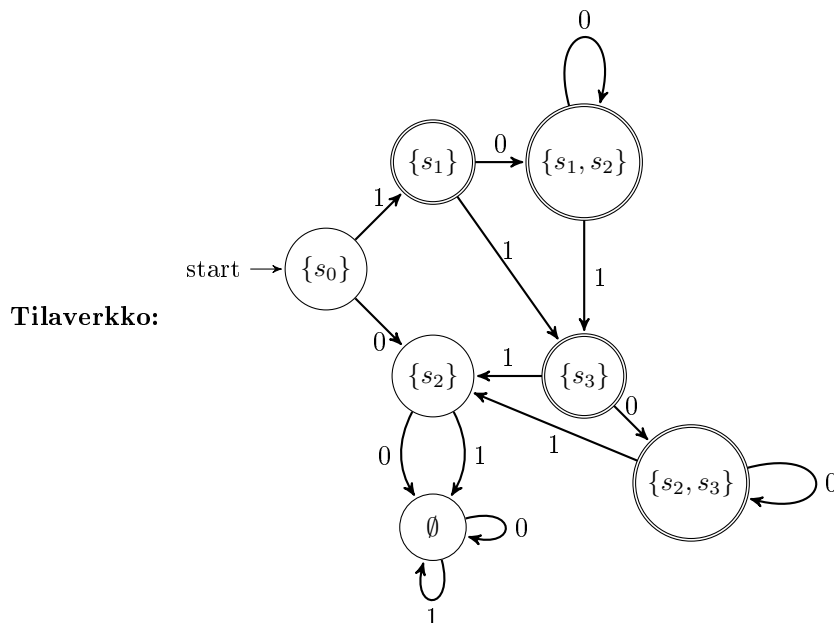
	0	1
s_0	s_2	s_1
s_1	s_1, s_2	s_3
s_2	—	—
s_3	s_2, s_3	s_2

Ratk.

Epädeterministinen automaatti:



Deterministinen automaatti:



5. Kieli L on aakkoston $\{a, b, c\}$ kieli joka sisältää täsmälleen kaikki ne sanat, joissa esiintyy osasanana sana ab ja sana c .
- Määrää kielen L määräävä säännöllinen ilmaisu.
 - Määrää Backus-Naur muotoinen kielioppi, joka tuottaa merkki kerrallaan vasemmalta oikealle täsmälleen kaikki kielen L sanat.
 - Määrää äärellinen deterministinen automaatti, joka hyväksyy kaikki kielen L sanat ja hylkää muut sanat. Piirrä automaatin tilaverkko ja selitä syötöt ja tilat.

Ratk. a) $(a + b + c)^*c(a + b + c)^*ab(a + b + c)^* + (a + b + c)^*ab(a + b + c)^*c(a + b + c)^*$

b) Muistetaan apukirjaimilla onko osasana ab ja/tai osasana c tehty.

$\langle S \rangle$ = Alkumerkki

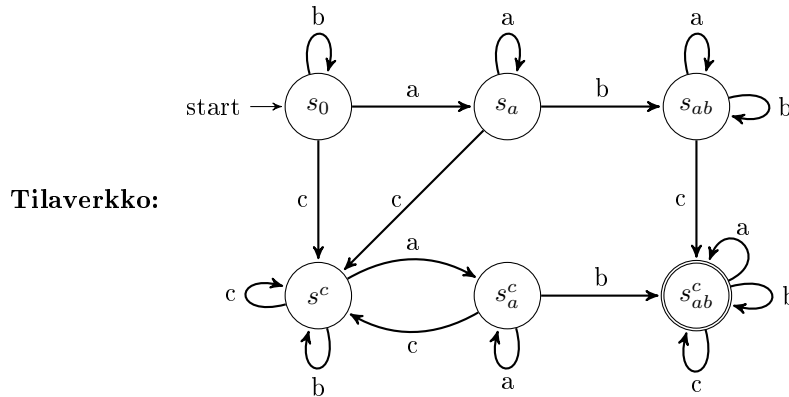
$\langle abc \rangle$ = osanat ab ja c on tehty

$\langle a \rangle$ = merkki a on tehty edellisenä $\langle ab \rangle$ = osasana ab on tehty

$\langle c \rangle$ = c on tehty mutta ab :tä ei $\langle ca \rangle$ = c on tehty ja a on tehty edellisenä.

$\langle S \rangle ::= a\langle a \rangle \mid b\langle S \rangle \mid c\langle c \rangle$
 $\langle a \rangle ::= a\langle a \rangle \mid b\langle ab \rangle \mid c\langle c \rangle$
 $\langle ab \rangle ::= a\langle ab \rangle \mid b\langle ab \rangle \mid c \mid c\langle abc \rangle$
 $\langle c \rangle ::= a\langle ca \rangle \mid b\langle c \rangle \mid c\langle c \rangle$
 $\langle ca \rangle ::= a\langle ca \rangle \mid b\langle abc \rangle \mid c\langle c \rangle$
 $\langle abc \rangle ::= a\langle abc \rangle \mid b\langle abc \rangle \mid c\langle abc \rangle \mid \lambda$

c) Syötöt: $\{a, b, c\}$. Tilalla muistetaan onko c luettu ja missä kohtaa ab :n lukemista ollaan. Esimerkiksi tilassa s_a^c on luettu c ja viimeiseksi on luettu a .

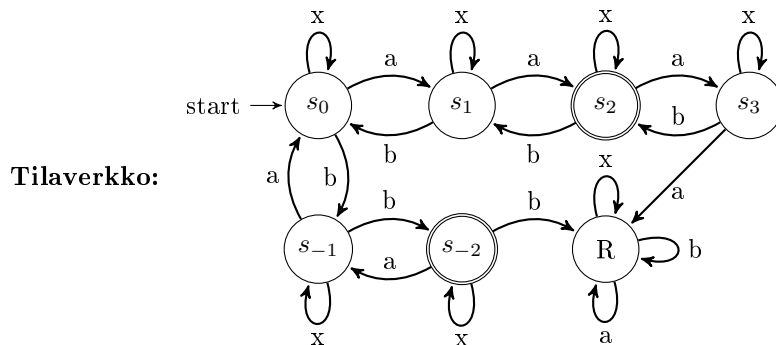


6. Tutkitaan kirjaimista a, b ja x koostuvia sanoja (vasemmalta oikealle). Sana w' on sanan w alkuosa, jos $w = w'w''$ jollakin sanalla w'' . Esimerkiksi λ, b, bx, bxb ovat sanan bxb alkuosat. Olkoon sanassa w esiintyvien a kirjainten lukumäärä $|w|_a$ ja b kirjainten lukumäärä $|w|_b$.

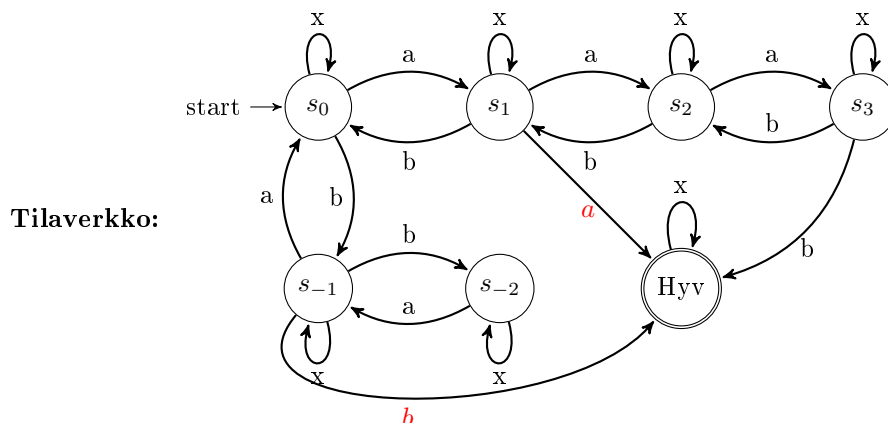
a) Rakenna sellainen äärellinen deterministinen automaatti, joka lukee kirjaimista a, b ja x koostuvia sanoja ja hyväksyy niistä sellaiset sanat w joille on voimassa molemmat seuraavista ehtoista: (i) jos w' on w :n alkuosa, niin $-2 \leq |w'|_a - |w'|_b \leq 3$ (ii) $|w|_a - |w|_b = \pm 2$, ja hylkää muut

b) Rakenna epädeterministinen automaatti, joka tunnistaa täsmälleen samat sanat kuin kohdan a) deterministinen automaatti, ja jolla on ainoastaan yksi hyväksyvä tila.

Ratk. a) Tiloilla muistetaan siihen mennessä luetulle sanalle w' luku $|w'|_a - |w'|_b$.

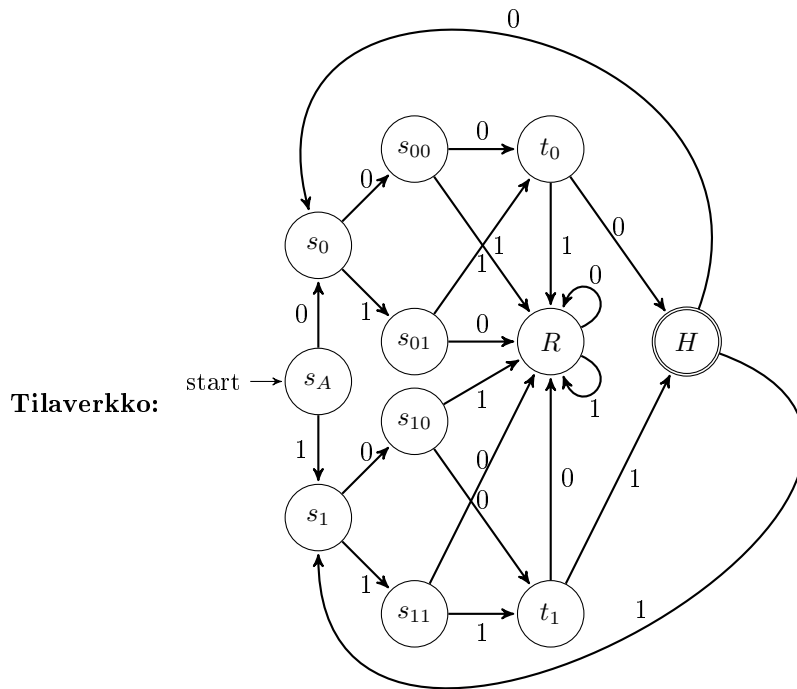


b) Ei tarvita hylkäävää tilaa. Kun luettu syöttö on sitä muotoa, ettei enää voi saada hyväksyttävää syöttöä, niin automaatti ei voi enää jatkaa lukemista.



7. 0:ista ja 1:istä koostuva merkkijono on palindromi, jos jono on sama luettaessa vasemmalta oikealle kuin oikealta vasemmalle (esimerkiksi jono 00100100 on palindromi). Luettele kaikki 4:stä merkistä koostuvat 0,1-palindromit (1p). Olkoon $w = w_1w_2w_3 \cdots w_n$, $n \geq 1$, missä jokainen $w_i (i = 1, \dots, n)$ on 4:stä merkistä koostuva (vain 0:ia ja 1:siä käsittävä) palindromi (i. w saadaan asettamalla mielivaltainen määrä (kuitenkin ainakin yksi) 4:n merkin palindromeja peräkkäin). Rakenna deterministinen äärellinen automaatti, joka hyväksyy 0,1-jonoista täsmälleen jonot w , jotka on kuvattu yllä. Voidaanko rakentaa äärellinen deterministinen automaatti joka hyväksyy täsmälleen kaikki aakkoston $\{0, 1\}$ palindromit? Jos voidaan, rakenna automaatti. Jos ei voida, selitä miksi ei.

Ratk. Aakkoston $\{0, 1\}$ 4:n pituiset palindromit ovat 1111, 0000, 1001, 0110. Tiloilla muistetaan mikä osa palindromeista on tehty (tilat $s_0, s_{00}, s_{01}, s_{10}, s_{11}$), mikä bitti on palindromeista vielä tehtävä (tilat t_0 ja t_1) ja onko tapahtunut virhe (tila R).



Väite: Kaikki aakkoston $\{0, 1\}$ palindromit (ja vain ne) hyväksyvää automaattia ei voida rakentaa.

Todistus. Tehdään **Vastaoletus:** Automaatti voidaan rakentaa ja se sisältää k tilaa.

Tarkastellaan sanaa $0^k 1^k 1^k 0^k$. Sana on palindromi, joten automaatti hyväksyy sanan.

Koska automaatissa on k tilaa, niin luettaessa sanan alkuosaa 0^k jokin tila esiintyy kaksi kertaa.

Oletetaan että näin tapahtuu kun sana 0^i ja sana 0^j on luettu, missä $j > i$. Silloin automaatti tunnistaa myös sanan $0^i 0^{k-j} 1^k 1^k 0^k$, eli sanan $0^l 1^k 1^k 0^k$, missä $l < k$. Tämä sana ei ole palindromi, joten Vastaoletus on väärä, eli Väite on voimassa.