

TIETOTEKNIKAN MATEMATIIKKA

Harjoitus 8 syksy 2021. Ratkaisut

1. Olkoon aakkosto $V = \{0, 1\}$. Mitkä seuraavista kielistä sisältävät sanan 01110?
- a) $\{0, 1\}^*$ b) $\{01\}\{1\}^*\{10\}$ c) $\{000\}^*\{1\}^*\{0\}^+\{11\}^*\{0\}^*$ d) $\{00\}^*\{10\}^*$ e) $\{\{0\}^*\{1\}^*\{0\}^*\}^+$.
- Ratk.** a) $\{0, 1\}^*$ sisältää kaikki bittijonot. Siis $01110 \in \{0, 1\}^*$
b) $01110 = 011^110 \in \{01\}\{1\}^*\{10\}$
c) Kielen $\{000\}^*\{1\}^*\{0\}^+\{11\}^*\{0\}^*$ sanoissa on pariton määrä 1:iä peräkkäin vain kun sana alkaa 000:lla tai 1:llä. Siis $01110 \notin \{000\}^*\{1\}^*\{0\}^+\{11\}^*\{0\}^*$.
d) 11 ei ole osasanana kielen $\{00\}^*\{10\}^*$ sanoissa. Siis $01110 \notin \{00\}^*\{10\}^*$.
e) $01110 = 01^30 \in \{0\}^*\{1\}^*\{0\}^*$. Siis $01110 \in \{\{0\}^*\{1\}^*\{0\}^*\}^+$

2. Määrää säännölliset ilmaisut seuraaville aakkoston $\{a, b\}$ kielille.

- a) Sanat, jotka alkavat kirjaimella a ja loppuvat kirjaimella b .
b) Sanat, joiden pituus on jaollinen 3:lla.
c) Sanat, joissa esiintyy ainakin 2 kirjainta b .
d) Sanat, joissa esiintyy pariton määrä kirjainta a .

Ratk. a) $a(a+b)^*b$.

b) $(aaa + aab + aba + baa + abb + bab + bba + bbb)^*$. Toinen ratkaisu $((a+b)(a+b)(a+b))^*$.

c) $(a+b)^*b(a+b)^*b(a+b)^*$.

d) $b^*ab^*(b^*ab^*ab^*)^*$.

3. Yksinkertaista alla olevat aakkoston $\{a, b\}$ säännölliset ilmaisut ja muunna ne säännöllisiksi kieliksi.

- a) $\lambda + ab + abab(ab)^*$ b) $b + ab^* + aa^*b + aa^*ab^*$.

Ratk. a) $\lambda + ab + abab(ab)^* = (ab)^*$ Säännöllinen kieli: $\{ab\}^*$.

b) $b + ab^* + aa^*b + aa^*ab^* = b + aa^*b + ab^* + aa^*ab^* = a^*b + aa^*b^* = a^*(b + ab^*)$

Säännöllinen kieli: $\{a\}^*(\{b\} \cup (\{a\}\{b\}^*))$.

4. Määrää säännölliset ilmaisut seuraaville aakkoston $\{a, b, c\}$ kielille.

a) Kieli sisältää kaikki aakkoston $\{a, b, c\}$ sanat (ja vain ne) jotka eivät pääty sanaan ab .

b) Kieli sisältää kaikki aakkoston $\{a, b, c\}$ sanat (ja vain ne) joissa kirjainta c on pariton määrä.

Ratk. a) $\lambda + a + b + c + (a + b + c)^*(aa + ac + ba + bb + bc + ca + cb + cc)$

b) $(a + b)^*c(a + b)^*((a + b)^*c(a + b)^*c(a + b)^*)^*$.

5. Tutkitaan oheista kielioppia. Minkä kielen tuottaa kielioppi

$G = (\{S, A, a, b, c\}, \{a, b, c\}, S, \{S \rightarrow aA, A \rightarrow bAa, A \rightarrow c\})$?

Ratk. Jokainen kieliopin johto on muotoa:

$$S \Rightarrow aA \Rightarrow abAa \Rightarrow abbAaa \Rightarrow \dots \Rightarrow ab^n Aa^n \Rightarrow ab^n ca^n, \text{ missä } n = 0, 1, \dots$$

Siis $L(G) = \{ab^n ca^n | n = 0, 1, \dots\} = \{ac, abca, ab^2ca^2, \dots\}$.

6. Määrää kieliopit ja säännölliset ilmaisut seuraaville aakkoston $\{a, b\}$ kielille.

a) Sanat, jotka alkavat kirjaimella a ja loppuvat sanaan ba .

b) Sanat, joissa esiintyy osasanana sana $babb$.

Ratk.

a) $P_a = \{S \rightarrow aXba, X \rightarrow aX, X \rightarrow bX, X \rightarrow \lambda\}$

$G_a = (\{S, X, a, b\}, \{a, b\}, S, P_a)$

b) $P_b = \{S \rightarrow aS, S \rightarrow bS, S \rightarrow babbX, X \rightarrow aX, X \rightarrow bX, X \rightarrow \lambda\}$

$G_b = (\{S, X, a, b\}, \{a, b\}, S, P_b)$.

7. Tutkitaan oheista (Backus-Naur-muotoista) kielioppia. Kirjoita kieli, jonka kielioppi määrittää.

$$\begin{aligned}\langle S \rangle &::= \langle A \rangle c \langle A \rangle \langle B \rangle \\ \langle A \rangle &::= a \langle A \rangle | \lambda \\ \langle B \rangle &::= b \langle B \rangle | b\end{aligned}$$

Ratk.

$$\begin{aligned}\langle S \rangle &\Rightarrow \langle A \rangle c \langle A \rangle \langle B \rangle \xrightarrow{*} a^n \langle A \rangle c \langle A \rangle \langle B \rangle \Rightarrow a^n c \langle A \rangle \langle B \rangle \xrightarrow{*} a^n c a^m \langle A \rangle \langle B \rangle \\ &\Rightarrow a^n c a^m \langle B \rangle \xrightarrow{*} a^n c a^m b^p \langle B \rangle \Rightarrow a^n c a^m b^{p+1}\end{aligned}$$

aina kun $n, m, p \geq 0$.

Ei muita johtoja.

Kieli: $\{a^n c a^m b^{p+1} \mid n = 0, 1, \dots, m = 0, 1, \dots, p = 0, 1, \dots\}$

8. Laadi Backus-Naur muotoinen kielioppi, joka tuottaa täsmälleen kaikki aakkoston $\{0, 1\}$ sanat, joissa esiintyy korkeintaan kolme 1:stä peräkkäin. Kuuluuko tyhjä sana kieleen?

Ratk. Apukirjaimessa muistetaan montako 1:stä on tehty peräkkäin.

$$\begin{aligned}\langle S \rangle &::= 0 \langle S \rangle | 1 \langle 1 \rangle | \lambda \\ \langle 1 \rangle &::= 0 \langle S \rangle | 1 \langle 11 \rangle | \lambda \\ \langle 11 \rangle &::= 0 \langle S \rangle | 1 \langle 111 \rangle | \lambda \\ \langle 111 \rangle &::= 0 \langle S \rangle | \lambda\end{aligned}$$

9. Tarkastellaan aakkoston $\{a, b, c\}$ kieltä L , joka sisältää täsmälleen kaikki sellaiset aakkoston sanat, joissa esiintyy osasanana sana acb ja joissa ei esiinny osasanana sanaa cc . Toisin sanoen

$$L = \{w \mid w \in \{a, c, b\}^*, acb \text{ on sanan } w \text{ osana ja } cc \text{ ei ole sanan } w \text{ osana}\}.$$

Laadi Backus-Naur muotoinen kielioppi, joka tuottaa merkki merkiltä vasemmalta oikealle täsmälleen kaikki kielen L sanat ja vain ne.

Ratk.

$$\begin{aligned}\langle S \rangle &::= a \langle a \rangle | b \langle S \rangle | c \langle c \rangle \\ \langle a \rangle &::= a \langle a \rangle | b \langle S \rangle | c \langle ac \rangle \\ \langle c \rangle &::= a \langle a \rangle | b \langle S \rangle \\ \langle ac \rangle &::= a \langle a \rangle | b \langle acb \rangle | b \\ \langle acb \rangle &::= a \langle acb \rangle | a | b \langle acb \rangle | b | c \langle acb \text{ ja } c \rangle | c \\ \langle acb \text{ ja } c \rangle &::= a \langle acb \rangle | b \langle acb \rangle | b\end{aligned}$$

10. Määrää sellainen pituutta lisäävä kielioppi, joka tuottaa saman kielen kuin kielioppi:

$$\begin{aligned}\langle S \rangle &::= \langle A \rangle a \\ \langle A \rangle &::= b d \langle B \rangle \\ \langle B \rangle &::= c \langle B \rangle | a d \langle B \rangle | \lambda\end{aligned}$$

Määrää kielioppien tuottama kieli.

Ratk. Idea: "Ennakoidaan" säännön $\langle B \rangle ::= \lambda$ käyttö kaikissa säännöissä, joissa oikealla puolella on apukirjain $\langle B \rangle$.

Uudet säännöt:

$$\begin{aligned}\langle S \rangle &::= \langle A \rangle a \\ \langle A \rangle &::= b d \langle B \rangle | b d \\ \langle B \rangle &::= c \langle B \rangle | c | a d \langle B \rangle | | a d.\end{aligned}$$

Kielioppien tuottama kieli: $\{bdwa \mid w \in (\{c\} \cup \{ad\})^*\}$. Säännöllinen ilmaisu: $bd(c + ad)^*a$.

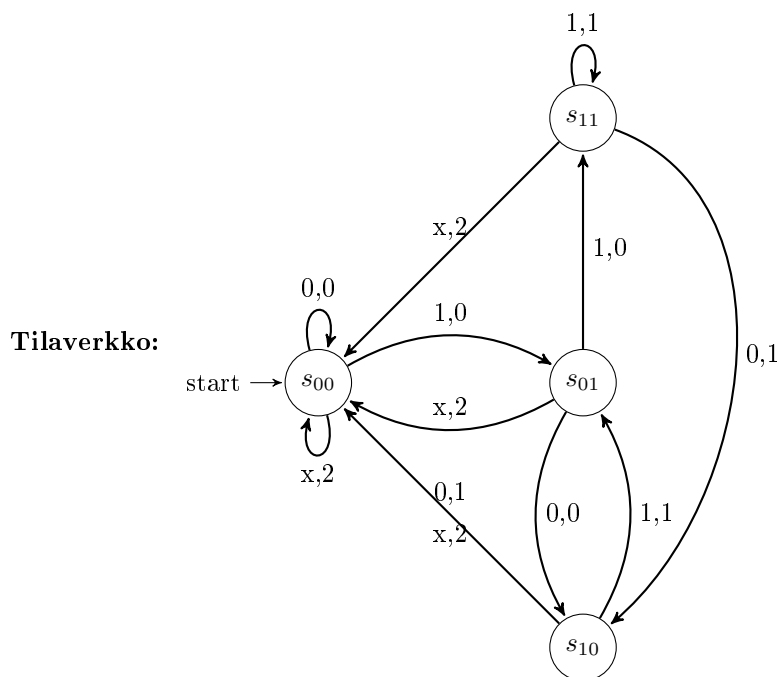
11. Tarkastellaan kahdella askeleella syöttöjonoa viivästyttävää jonokonetta. Jonokoneen syöttöjono koostuvat nolista ja ykkösistä sekä symbolista x . Syötössä esiintyvää $0, 1$ jonoa viivästetään kahdella askeleella tulostamalla aluksi symbolijono 00 ja sen jälkeen syötön $0, 1$ jono alusta alkaen lukuunottamatta kahta viimeistä merkkiä. Syöttösymboli x ilmoittaa $0, 1$ jonon loppumisen, jolloin jonokone tulostaa symbolin 2 ja palaa uuden jonon käsittelyvalmiuteen. Esimerkiksi syötettäessä jono **01100110x** saadaan tulostuksena **000110012**. Laadi jonokoneen tilaverkko. Selitä koneen tilat sekä syöttö- ja tulostussymbolit.

Ratk. Tila muistaa kaksi seuraavaksi tulostettavaa bittiä.

Tilat: $S = \{s_{00}, s_{01}, s_{10}, s_{11}\}$. Esimerkiksi tilassa s_{01} tiedetään, että seuraavaksi on tulostettava 01.

Syöttöaakkosto: $\{0, 1, x\}$

Tulostusaakkosto: $\{0, 1, 2\}$

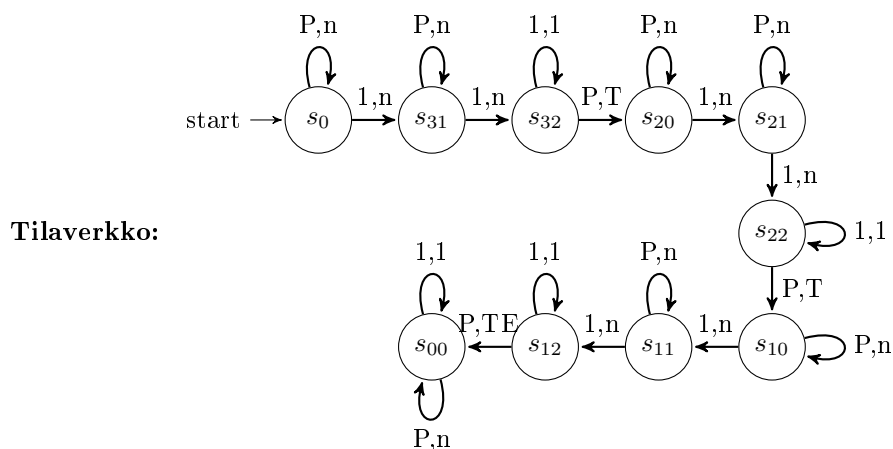


12. Myyntiautomaattiin ladattiin kolme kappaletta (samaa) tuotetta (=T). Tuotteen hinta on 2 euroa ja automaatin raha-aukkoon sopivat vain 1 euron kolikot (tehtävän ulkopuolelle jätetään rahojen oikeellisuuden testaus). Kun tuotteen hinta on tullut syötetyksi, niin automaatti palauttaa syötetyt ylimääräiset kolikot ja painamalla palvelunappia (=P) automaatti luovuttaa maksetun tuotteen. Kun viimeinen automaatin sisältämä tuote luovutetaan, niin samanaikaisesti liukuu estelevy (=E) raha-aukon eteen. Laadi automaatin toimintaa kuvaava jonokoneen tilaverkko. Selitä koneen tilat sekä syöttö- ja tulostussymbolit.

Ratk. Tiloilla muistetaan syötetty rahamäärä ja jäljelläolevien tuotteiden määrä. Esimerkiksi tila s_{32} tarkoittaa, että tuotteita on jäljellä 3 ja on syötetty rahamäärä 2 euroa.

Syöttöaakkosto: $\{1, P\}$

Tulostusaakkosto: $\{T, 1, n, TE\}$, missä T = tuote, 1 = euron kolikko, n = ei mitään ja TE = tuote ja estelevy.



13. Eräissä ohjelmointikielissä desimaaliluku N on esitettävä muodossa mn^* , $mn^*.n^*$, n^* tai $n^*.n^*$, missä m on etumerkki ($m \in \{+, -\}$) n on numero ($n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$) ja n^* on mielivaltaisen pituinen jono numeroita. Jonon pituus voi olla myös 0 (tyhjä jono). Esimerkiksi $+2.74$, $-.58$, 129 , $+$

ovat oikein esitettyjä desimaalilukuja. Määrää sellaisen jonokoneen tilaverkko, joka tarkistaa, onko syöttönä oikein esitetty desimaaliluku tulostamalla jokaisen luetun syöttömerkin jälkeen luvun 1, jos tähän mennessä luettu osa syöttöä on oikein esitetty desimaaliluku ja luvun 0 muutoin. Luvun syötön aloitus ja lopetus tapahtuvat painamalla välilyöntinäppäintä (jolloin output on tyhjä = ei mitään = e). Mitkä ovat koneen syötöt, tulostukset ja mistä koneen tilat koostuvat? HUOM! Merkin-
nät yksinkertaistuvat, jos käytät syöttömerkkiä n kuvaamaan mitä tahansa numeroista $0, 1, \dots, 9$. Amerikkalaisen käytännön mukaisesti tässä desimaalipilkun paikalla on piste.

Ratk. Tiloilla muistetaan, onko syöttö tähän mennessä oikea ja missä kohtaa syöttöä ollaan.

Syöttöaakkosto: $\{+, -, \bullet, 0, 1, \dots, 9, \square\}$, missä $\square =$ välilyönti.

Lyhennysmerkintänä m tarkoittaa etumerkkiä, eli $m \in \{+, -\}$ ja n mitä tahansa numeroa $0, 1, 2, \dots, 9$.

Tulostusakkosto: $\{0, 1, e\}$, missä $e =$ "Ei mitään".

Tilat: $\{S_a, S1, M, Piste, R\}$, missä S_a on alkutila, R on virhetila, tilassa $S1$ on syötetty pariton määrä välilyöntejä, tilassa M 1. syötetty merkki välilyönnin jälkeen on joko etumerkki tai numero ja tilassa $Piste$ on piste syötetty .

