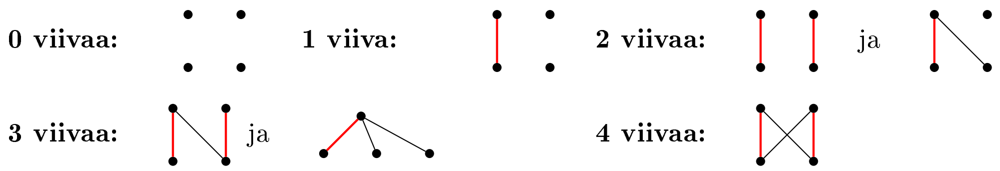
TIETOTEKNIIKAN MATEMATIIKKA

Harjoitus 7 syksy 2021 . Ratkaisut

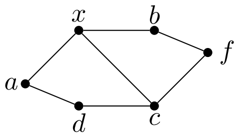
1. Piirrä kaikki ei-isomorfiset kaksijakoiset 4 pistettä sisältävät graafit ja merkitse jokaiseen niistä kyseisen graafin maksimisovitus.

   Ratk. Maksimisovituksen viivat punaisella.



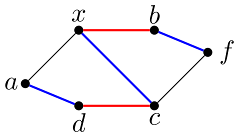
2. Etsi alla olevan graafin sovituksen $M = \{xb, dc\}$ M-lisäyspolku ja määrää sen avulla graafin maksimisovitus.

G:



Ratk.

G:



M-lisäyspolku: $a \to d \to c \to x \to b \to f$

Maksimisovitus: $\{ad, cx, bf\}$.

3. Osoita, että hyperkuutio Q_n on kaksijakoinen, ja osoita, että Q_n:llä on täydellinen sovitus aina kun $n \geq 1$. Montako viivaa sovitus sisältää?

   Ratk. Väite: Q_n on kaksijakoinen aina kun $n = 1, 2, \ldots$.

   Tod. Lause 7.5: Q_n:n pisteet voidaan nimetä n:n pituisella bittijonolla niin, että jokainen bittijono on täsmälleen yhden pisteen nimi ja kaksi pistettä ovat vieruspisteitä täsmälleen silloin kun niiden nimet eroavat täsmälleen yhden bitin verran.

   Nimetään graafin Q_n pisteet edellä kuvatulla tavalla. Olkoon $X = \{u | u$ on n:n pituinen bittijono, jossa esiintyy parillinen määrä bittiä 1$\}$, ja $Y = \{u | u$ on n:n pituinen bittijono, jossa esiintyy pariton määrä bittiä 1$\}$ Selvästi aina kun uv on graafin Q_n viiva, niin $u \in X$ ja $v \in Y$. Siis Q_n on (X, Y)-kaksijakoinen.

   Väite: Q_n:llä on täydellinen sovitus.

   Tod. Nyt $Q_n = K_2 \times Q_{n-1}$, eli Q_n muodostuu kahdesta Q_{n-1}:sen kopiosta, joiden vastinpisteet on liitty yhteen uusilla viivoilla. Nämä vastinpisteet yhdistävät viivat muodostavat Q_n:n täydellisen sovituksen ja viivoja on $|V_{Q_{n-1}}|$ kappaletta, eli 2^{n-1} kappaletta.

4. Projektissa on n tehtävää ja n työntekijää, $n \geq 2$. Jokainen työntekijä on pätevä toimimaan täsmälleen k:ssa tehtävässä, $k \geq 1$ ja jokaiseen tehtävään on täsmälleen k pätevää työntekijää. Voidaanko jokaiseen tehtävään valita pätevä työntekijä niin, että kaikille työntekijöille on tehtävä. Perustele vastauksesi.

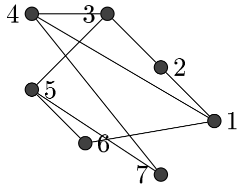
   Ratk. Muodostetaan graafi $G = (\{1, 2, \ldots, u_n\} \cup \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, E)$, missä $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ovat työntekijät ja $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ovat tehtävät, ja $E = \{u_i v_j |\ u_i$ on pätevä toimimaan tehtävässä $v_j\}$. Selvästi G on kaksijakoinen graafi. Koska $deg_G(u_i) = deg_G(v_j) = k$ kaikilla i, j, niin G on k-säännöllinen graafi. Graafilla G on täydellinen sovitus Lauseen 7.25 perusteella. Siis jokaiseen tehtävään voidaan valita pätevä työntekijä.

5. Yliopiston uutta tietojärjestelmää rakentavat suunnittelijat $A, B, C, \ldots, I$ olivat suunnittelutiimien $1, 2, \ldots, 7$ jäseniä seuraavasti:

Suunnittelija:	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Tiimi:	1,2	1,4	1,6	2,3	3,4	3,5	5,6	4,7	5,7

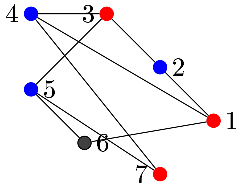
Koska projektilla oli kiire, ja suunnittelijoilla oli muitakin tehtäviä, niin tiimien vekkopalaverit pyrittiin pitämään mahdollisimman nopeasti. Jokainen tiimi pitää yhden tunnin mittaisen palaverin niin että kukaan suunnittelijoista ei ole kahdessa palaverissa yhtäaikaa. Kuinka monessa tunnissa kaikki palaverit on saatu pidettyä? Mihin graafiteorian ongelmaan tämä ongelma palautuu?

Ratk. Muodostetaan graafi, missä tiimit ovat pisteitä, pisteiden välillä on viiva, silloin kun tiimeillä on yhteisiä jäseniä.

Taulukko graafina G: 

Graafiteorian ongelma: Mikä on G:n kromaattinen luku $\chi(G)$ ja mikä G:n aito väritys $\chi(G)$:llä värillä.

Koska G sisältää parittoman piirin $1 \to 2 \to 3 \to 5 \to 6 \to 1$, niin $\chi(G) \geq 3$. Toisaalta aito 3 väritys on olemassa:

Aito 3 väritys G:lle: 

Siis $\chi(G) = 3$ ja palaverit voidaan pitää kolmessa tunnissa.

6. Määrää graafien K_7, C_{2n} ja C_{2n+1}, kun $n = 2, 3, 4, \ldots$, sekä graafien $W_{1,7}$, $K_2 + C_4$ ja $K_m + C_{2n}$ kromaattinen luku.

   Ratk. $\chi(K_7) = 7$, $\chi(C_{2n}) = 2$ ja $\chi(C_{2n+1}) = 3$.

   $\mathbf{W_{1,7}}$: Keskimmäisen pisteen on oltava erivärinen kuin muut. Muut pisteet muodostavat parittoman piirin, jonka aito väritys saadaan minimissään 3:lla värillä. Siis $\chi(W_{1,7}) = 4$.

   $\mathbf{K_2 + C_4}$: Nyt $\chi(C_4) = 2$ ja koska muut kaksi graafin pistettä ovat kaikkien muiden graafin pisteiden naapureita, niin $\chi(K_2 + C_4) = 4$.

   $\chi(K_m + C_{2n}) = m + 2$.

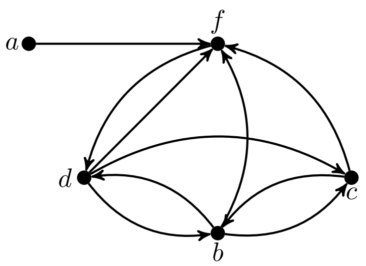
7. Osoita, että kaikille graafeille G on $\chi(K_2 \times G) = \chi(G)$.

   Ratk. Väite: $\chi(K_2 \times G) = \chi(G)$.

   Tod. Koska G_2 on graafin $K_2 \times G$ aligraafi, niin $\chi(K_2 \times G) \geq \chi(G)$. Nyt $K_2 \times G$ koostuu kahdesta graafin G kopiosta G_1 ja G_2, joiden vastinpisteet on liitetty yhteen uusilla viivoilla. Graafilla G_1 on aito $\chi(G)$ väritys väreillä $1, 2, 3, \ldots, \chi(G)$. Väritetään G_2 niin, että ne pisteet, jotka G_1:ssä väritettiin värillä 1 väritetään G_2:ssa värillä 2, ne jotka väritettiin värillä 2 väritetään värillä 3, ja näin jatketaan, kunnes värillä $\chi(G)$ G_1:ssä väritetyt pisteet väritetään G_2:ssa värillä 1. Näin on saatu graafille G_2 aito $\chi(G)$ väritys niin, että graafien G_1 ja G_2 vastinpisteet ovat aina erivärinen. Siis edellä kuvattu väritys on myös graafin $K_2 \times G$ aito $\chi(G)$-väritys. Siis $\chi(K_2 \times G) \leq \chi(G)$, ja Väite on voimassa.

8. Onko graafi $D = (V_D, E_D)$, missä $V_D = \{a, b, c, d, f\}$ ja $E_D = \{af, bc, bd, bf, cb, cf, db, dc, df, fd\}$, yhtenäinen, unilateraalinen tai vahvasti yhtenäinen. Määrää D:n pisteiden tulo- ja lähtöasteet.

   Ratk.

D: 

Tulo- ja lähtöasteet:

	deg_D^I	deg_D^O
a	0	1
b	2	3
c	2	2
d	2	3
f	4	1

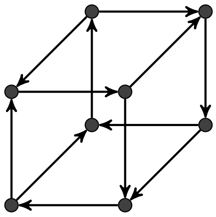
Selvästi D on yhtenäinen.

D ei sisällä suunnattua polkua $f \xrightarrow{*} a$, joten D ei ole vahvasti yhtenäinen.

D sisältää joko suunnatun polun $x \xrightarrow{*} y$ tai suunnatun polun $y \xrightarrow{*} x$ aina kun $x, y \in V_D$, joten D on unilateraalinen.

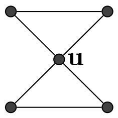
9. Määrää hyperkuution Q_3 vahvasti yhtenäinen orientaatio.

Ratk.

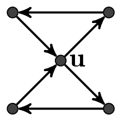


10. Voiko vahvasti yhtenäisen orientaation sisältävä graafi sisältää irrotuspisteen?

Ratk.

G: 

Piste u on graafin G irrotuspiste.

G:n vahvasti yhtenäinen orientaatio: 

Vastaus: Kyllä.

11. Suunnattu graafi on asyklinen, jos se ei sisällä suunnattua piiriä. Osoita, että asyklinen suunnattu graafi sisältää pisteen, jonka tuloaste on 0.

Ratk. Oletus: $D = (V_D, E_D)$ on asyklinen suunnattu graafi.

Väite: $deg_D^I(v) = 0$ jollakin pisteellä $v \in V_D$.

Tod. Olkoot $P : v \xrightarrow{*} u$ D:n pisin suunnattu polku.

Vastaoletus: $deg_D^I(v) > 0$

Vastaoletuksen perusteella on olemassa D:n suunnattu viiva xv jollakin pisteellä $x \in V_D$, $x \neq v$.

Jos x ei esiinny suunnatussa polussa P, niin polku $(xv)P$ eli polku $x \to v \xrightarrow{*} u$ on pidempi kuin P.

Tämä on ristiriita, koska P oli pisin.

Jos piste x esiintyy polussa P, niin D sisältää suunnatun piirin $x \to v \xrightarrow{*} x$.

Tämä on ristiriita, koska D oli asyklinen.

Siis Vastaoletus on epätosi ja Väite on voimassa.