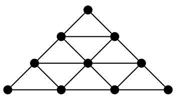
TIETOTEKNIIKAN MATEMATIIKKA

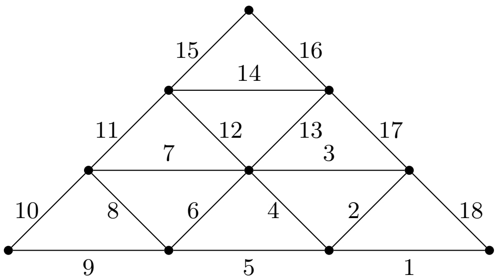
Harjoitus 6 syksy 2021. Ratkaisut

1. Tarkastellaan alla olevaa graafia. Se sisältää alla kuvatun kaltaisia tasoja n kappaletta. Onko graafi Eulerin graafi? Jos on, niin kuvaa Eulerin kierros ja jos ei niin perustele miksi ei.



Ratk. Jokaisen pisteen aste on parillinen, joten graafi on Eulerin graafi.

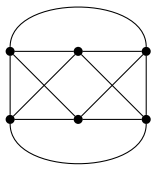
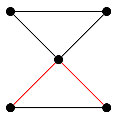
Eulerin kierros saadaan, kun käydään alla olevassa graafissa viivat numerojärjestyksessä.



Vastaava menettely toimii kun tasoja on n kpl.

2. a) Piirrä vähintään 6 pistettä sisältävä Eulerin graafi, joka ei ole piiri.

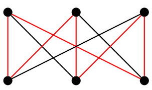
   b) Piirrä Eulerin graafi, jossa kahdella viivalla on yhteinen vieruspiste, mutta nämä kaksi viivaa eivät ole peräkkäin yhdessäkään graafin Eulerin kierroksessa.

Ratk. a)  **b)** 

3. a) Tutki ovatko graafit $K_{3,3}$ ja $K_{13,20}$ Hamiltonin graafeja.

   b) Milloin graafi $K_{m,n}$ on Hamiltonin graafi?

Ratk. a)

$\mathbf{K_{3,3}}$:  Punaiset viivat muodostavat Hamiltonin piirin, joten $K_{3,3}$ on Hamiltonin graafi.

$\mathbf{K_{13,20}}$: Hamiltonin piirissä joka toisen pisteen olisi oltava 13 pisteen joukosta ja joka toisen 20 pisteen joukosta. Tämä on mahdotonta, koska joukoissa on pisteitä eri määrä. Graafi ei ole Hamiltonin graafi.

b) Kuten $K_{3,3}$ niin myös $K_{n,n}$ on Hamiltonin piiri aina kun $n = 2, 3, 4 \ldots$. Kuten $K_{13,20}$, niin $K_{m,n}$ ei ole Hamiltonin piiri, kun $m \neq n$.

4. Osoita, että graafi $K_n + \overline{K_{n+1}}$ ei ole Hamiltonin graafi millään $n = 1, 2, \ldots$.

Ratk. Olkoot $K_n = (V_{K_n}, E_{K_n})$, $K_{n+1} = (V_{K_{n+1}}, E_{K_{n+1}})$, missä graafit K_n ja K_{n+1} ovat erilliset. Olkoot $G = K_n + \overline{K_{n+1}}$. Nyt G sisältää kaikki graafien K_n ja K_{n+1} pisteet, sekä kaikki graafin K_n viivat, sekä kaikki viivat uv, missä u on graafin K_n piste ja v on graafin K_{n+1} piste. Toisin sanoen $V_G = V_{K_n} \cup V_{K_{n+1}}$ ja $E_G = E_{K_n} \cup \{uv | u \in V_{K_n} \text{ ja } v \in V_{K_{n+1}}\}$.

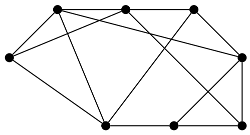
$G - V_{K_n}$ on graafi joka saadaan poistamalla G:stä kaikki graafin K_n pisteet ja niihin liittyvät viivat. Selvästi $G - V_{K_n} = \overline{K_{n+1}}$.

Graafi $G - V_{K_n}$ sisältää $n+1$ komponenttia (jokainen graafin $\overline{K_{n+1}}$ piste muodostaa oman komponentin), eli $c(G - V_{K_n}) = n + 1$

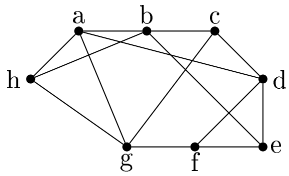
Toisaalta V_{K_n} sisältää n pistettä.

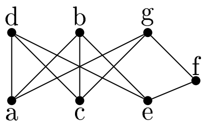
Siis $c(G - V_{K_n}) = n + 1 > n = |V_{K_n}|$. Lauseen 7.7. perusteella G ei ole Hamiltonin graafi.

5. Onko alla oleva graafi tasograafi?



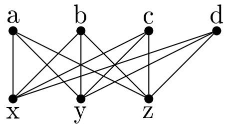
Ratk.

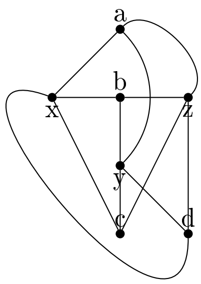
G: 

Eräs G:n aligraafi **H:** 

Koska G:n aligraafi H on graafin $K_{3,3}$ viivalaajennus, niin G ei ole tasograafi.

6. Piirrä graafi $K_{3,4}$ niin, että piirros sisältää vain kaksi viivojen risteämistä muualla kuin pisteiden kohdalla.

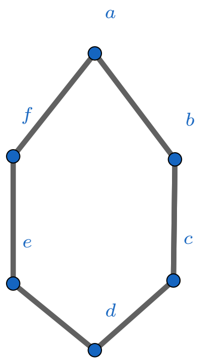
Ratk. $K_{3,4}$: 

$K_{3,4}$ toisin : 

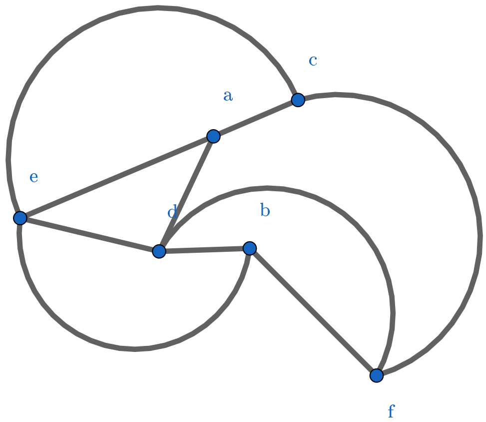
7. Graafi $\overline{C}_n$ on piirin C_n komplementti. Tutki onko graafi a) $\overline{C}_6$ b) $\overline{C}_7$ tasograafi. Jos on, niin piirrä tasoupotus. Jos ei ole, niin perustele miksi ei.

Ratk.

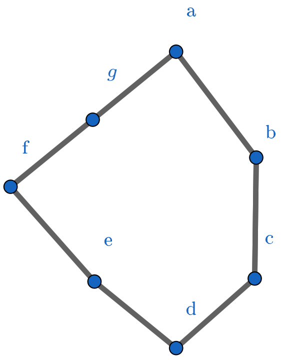
C_6



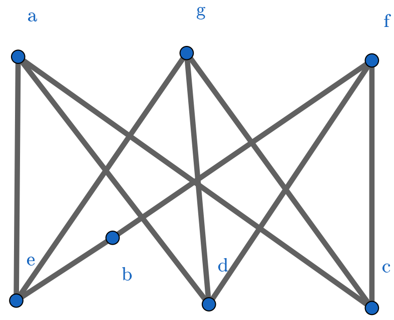
$\overline{C}_6$:n tasoupotus



C_7



G



Nyt G on $\overline{C}_7$:n aligraafi, ja $K_{3,3}$:n viivalaajennus, joten $\overline{C}_7$ ei ole tasograafi.

8. Osoita, että jokainen 6 pistettä sisältävä graafi, joka sisältää kaksi viivalla yhdistettyä asteen 2 pistettä joilla ei ole yhteistä vieruspistettä, on tasograafi.

Ratk. Olkoon G 6 pistettä sisältävä graafi, joka sisältää kaksi viivalla yhdistettyä asteen 2 pistettä joilla ei ole yhteistä vieruspistettä.

Jos graafi ei ole tasograafi, niin se sisältää aligraafinaan joko graafin K_5 tai graafin $K_{3,3}$ viivalaajennuksen.

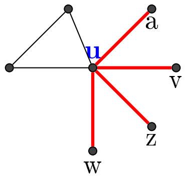
Jos graafi sisältää graafin K_5:n viivalaajennuksen, niin se sisältää vähintään 5 pistettä joiden aste on 4 tai suurempi. Koska G:n kuudesta pisteestä kahden aste on 2, niin G ei sisällä graafin K_5 viivalaajennusta.

Jos graafi sisältää graafin $K_{3,3}$:n viivalaajennuksen, niin se sisältää vähintään 6 pistettä joiden aste on 3 tai suurempi. Koska G:n kuudesta pisteestä kahden aste on 2, niin G ei sisällä myöskään graafin $K_{3,3}$ viivalaajennusta.

Täten G on tasograafi.

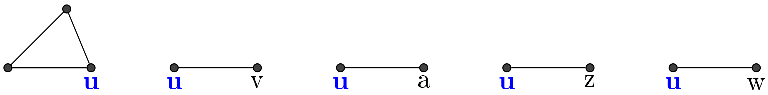
9. Onko mahdollista konstruoida yhtenäinen graafi, joka sisältää korkeintaan 9 pistettä, täsmälleen yhden irrotuspisteen, täsmälleen 4 siltaa ja ainakin 5 blokkia. Jos on, niin piirrä ehdot täyttävä graafi, johon merkitset kaikki irrotuspisteet, sillat ja blokit. Jos ei ole, niin todista miksi ei.

Ratk. Eräs ratkaisu:



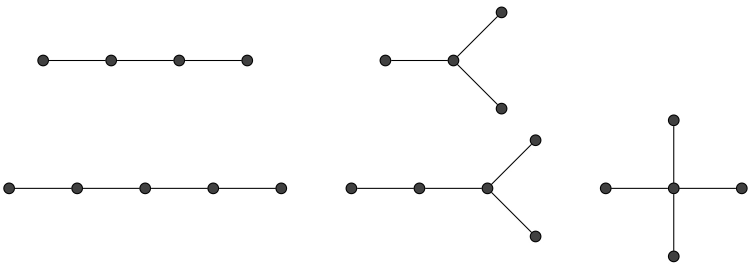
Sillat ua, uv, uz ja uw. Irrotuspiste: $\{\mathbf{u}\}$

Blokit:



10. Piirrä kaikki ei-isomorfiset 4 tai 5 pistettä sisältävät puut.

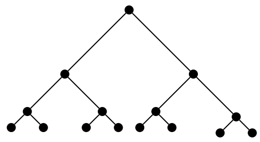
Ratk.



11. Juurrettu puu on binääripuu, jos jokaisella pisteellä on korkeintaan 2 lasta. Montako pistettä enintään on k:n korkuisella binääripuulla. Montako lehteä?

Ratk. a)

Eniten lehtiä sisältävä binääripuu, jonka korkeus on 3:



Lehtiä enintään $8 = 2^3$. Pisteitä yhteensä $1 + 2 + 4 + 8 = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 15 = 2^{3+1} - 1$.

Vastaavasti, jos binääripuun korkeus on k, niin maksimissaaan lehtiä on 2^k kpl.

Pisteitä enimmillään $1 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k \overset{\text{geometrinen summa}}{=} \frac{1(1-2^{k+1})}{1-2} = 2^{k+1} - 1$ kappaletta.

12. Tietokoneverkko voidaan esittää graafina, missä pisteet kuvaavat tietokoneita ja viivat kuvaavat suoria yhteyksiä. Jokaisella tietokoneella v on osoite eli bittijono $\alpha(v)$. Osoitteen pituus on bittien lukumäärä osoitteessa. Viestiä, joka on tarkoitettu tietokoneelle v, edeltää aina v:n osoite. Kahden samanpituisen osoitteen Hamming-etäisyys $h(\alpha(u), \alpha(v))$ on niiden osoitteen bittien lukumäärä, joissa kyseiset osoitteet eroavat. Esimerkiksi $h(00100, 11101) = 3$.

Graafi on osoitettavissa oleva(addressable), jos sen pisteille voidaan muodostaa sellainen osoitteisto, missä

$$d_G(u, v) = h(\alpha(u), \alpha(v)).$$

Osoita, että jokainen puu $T = (V, E)$ on osoitettavissa oleva ja puun pisteiden osoitteiden pituudeksi voidaan valita $|V|$-1.

Ratk. Väite: Jokainen puu $T = (V, E)$ on osoitettavissa oleva ja osoitteen pituudeksi voidaan valita $|V| - 1$.

Tod. Matemaattinen induktio puun pisteiden lukumäärän suhteen.

Tapaus $|V| = 2$.

Ainoa puu: Osoitteet 0 ja 1.

Induktio-oletus: Aina kun $V \leq k$, niin Väite on voimassa.

Tapaus $|V| = k+1$. Olkoon $V = \{v_1, v_2, \dots v_k, v_{k+1}\}$. Olkoon v_i eräs T:n lehti ja $v_i v_j$ T:n ainoa viiva jossa v_i on päätepisteenä . Poistetaan T:stä piste v_i ja viiva $v_i v_j$. Saadaan puu $T - v_i$, jossa on k pistettä. Induktio-oletuksen perusteella tämä puu on osoitettavissa oleva ja osoitteen pituus on $k-1$. Olkoon tämä osoite α_l aina kun $l = 1, 2, \dots, k+1$ ja $l \neq i$.

Määritellään osoite puussa T niin, että pisteen v_l osoite on $0\alpha_l$ aina kun $l = 1, 2, \dots, k+1$ ja $l \neq i$, eli lisätään osoitteen eteen 0. Pisteen v_i osoitteeksi määritellään $1\alpha_j$. Silloin on saatu T:n pisteiden haluttu osoitteisto, jonka pituus on k.

Väite seuraa induktioperiaatteesta.

13. Osoita, että jokainen yhtenäinen graafi G, jolle $\Delta(G) \leq 2$, on polku tai piiri.

Ratk. Olkoon $G = (V_G, E_G)$ yhtenäinen graafi, jolle $\Delta(G) \leq 2$. Matemaattinen induktio $|V_G|$:n suhteen.

Jos $|V_G| = 3$, niin G on P_3 tai C_3, eli polku tai piiri.

Induktio-oletus: Aina kun $|V_G| \leq k$, on G polku tai piiri.

Olkoon $|V_G| = k+1$. Olkoon $v \in V_G$ mielivaltainen, ja $G' = G[V_G \setminus \{v\}]$.

(i) Oletetaan, että G' on yhtenäinen. Koska $deg_{G'}(u) \leq deg_G(u)$ kaikilla $u \in V_G$, niin $\Delta(G') \leq 2$. Induktio-oletuksen perusteella G' on polku tai piiri.

Jos G' on piiri, niin $\deg_{G'}(u) = 2$ kaikilla $u \in V_{G'}$. Silloin jos u on V:n naapuri G:ssä, niiin $deg_G(u) = deg_{G'}(u) + 1 = 3$. Tämä on mahdotonta, koska $\Delta(G) = 2$. Siis G' ei ole piiri.

Jos G' on polku, niin G on polku, jos $deg_G(v) = 1$, ja G on piiri, jos $deg_G(v) = 2$.

(ii) Oletetaan, että G' on epäyhtenäinen. Silloin G':lla on kaksi komponenttia G_1 ja G_2, $N_G(v) = \{v_1, v_2\}$, missä $v_1 \in G_1$ ja $v_2 \in G_2$, ja $|V_{G_i}| \leq k$, kun $i = 1, 2$. Induktio-oletuksen mukaan G_1 ja G_2 ovat polkuja tai piirejä.

Jos G_1 (vastaavasti G_2) on piiri, niin silloin $deg_{G_1}(v_1) = 2$, eli $deg_G(v_1) = 3$, mikä on mahdotonta, koska $\Delta(G) = 2$. Siis G_1 ja G_2 ovat molemmat polkuja, joten myös G on polku.