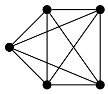
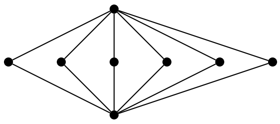
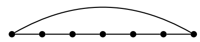
TIETOTEKNIIKAN MATEMATIIKKA

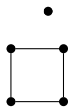
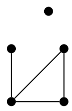
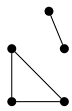
Harjoitus 5 syksy 2021 Ratkaisut

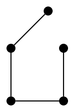
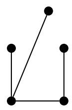
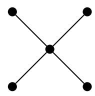
1. Piirrä seuraavat graafit a)K_5, b)$K_{2,6}$ c) P_7 d) C_7.

Ratk. $\mathbf{K_5}$:  $\mathbf{K_{2,6}}$:  $\mathbf{P_7}$: $\mathbf{C_7}$: 

2. Piirrä kaikki 5 pistettä ja 4 viivaa sisältävät ei isomorfiset graafit.

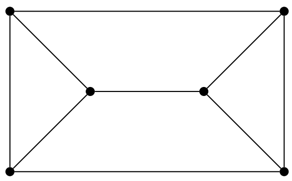
Ratk.

Epäyhtenäiset:   **ja** 

Yhtenäiset:   **ja** 

3. Onko mahdollista piirtää a) 3-säännöllinen 6 pistettä sisältävä graafi, b) 3-säännöllinen 7 pistettä sisältävä graafi. Jos on mahdollista, niin piirrä graafi. Jos ei ole mahdollista, niin perustele miksi ei.

Ratk.

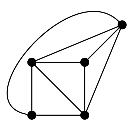
a) On: 

b) Jos 3-säännöllisessä graafissa on 7 pistettä, niin asteiden summa $\sum deg(v) = 7 \cdot 3 = 21$. Koska 21 on pariton, niin Kättelylauseen (Lause 7.2.) perusteella tällaista graafia ei ole olemassa.

4. a) Piirrä alla olevan vieruspistematriisin omaava graafi

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Hahmottele graafien K_n, C_n ja $K_{m,n}$ vieruspistematriisit. Määrää jokaiselle graafeista K_5, C_4 ja $K_{2,3}$ yksi vieruspistematriisi.

Ratk. a) 

b) Vieruspistematriiseja voi olla useita. Seuraavassa aina yksi niistä.

$\mathbf{K_n}$: $n \times n$ matriisi $M_{ij} = \begin{cases} 1 & , i \neq j \\ 0 & , i = j \end{cases}$. Esimerkiksi $\mathbf{K_5}$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$\mathbf{C_n}$: $n \times n$ matriisi $M_{ij} = \begin{cases} 1 & , |i-j| = 1 \\ 1 & , i = 1, j = n \\ 1 & , i = n, j = 1 \\ 0 & , \text{ muualla} \end{cases}$. Esimerkiksi C_4: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$\mathbf{K_{m,n}}$: $(m+n) \times (m+n)$ matriisi $M_{ij} = \begin{cases} 1 & , i \leq m \text{ ja } j \geq m+1, \text{ tai } i \geq m+1 \text{ ja } j \leq m \\ 0 & , \text{ muualla} \end{cases}$.

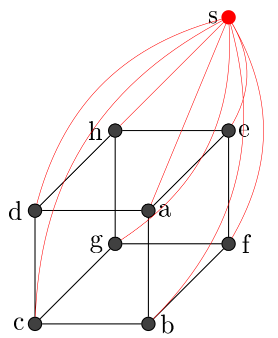
Esimerkiksi $K_{2,3}$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. **Tiedonsiirto-ongelma** (Transmitting problem)

Olkoon G graafi, josta saadaan graafi G_s lisäämällä siihen uusi piste s (=lähde) ja viiva pisteestä s jokaiseen graafin G pisteeseen. Jokaisena aikayksikkönä lähde s voi lähettää viestin yhteen G:n pisteeseen ja jokainen viestin jo saanut piste voi välittää viestin kaikille naapureilleen G:ssä. Kuinka monta aikayksikköä $t(G)$ tarvitaan, että jokainen G:n piste on vastaanottanut viestin? Määrää $t(Q_3)$.

Ratk.

$(\mathbf{Q_3})_\mathbf{s}$:



(i) Yläraja $t(Q_3)$:lle:

Ajanhetki 1: $s \to a$
Ajanhetki 2: $s \to g, a \to b,\ a \to d\ a \to e$
Ajanhetki 3: $s \to f,\ g \to c$ ja $d \to h$.

Siis $t(Q_3) \leq 3$.

(ii) Osoitetaan, että $t(Q_3) > 2$.

Aina kun piste $v \in \{a, b, c, d, f, g, h\}$ niin on olemassa kaksi eri pistettä joukosta $\{a, b, c, d, f, g, h\}$ jotka eivät ole kumpikaan piste v tai v:n naapuri. Lähetettäessä ajanhetkellä 1 pisteestä s viesti mihin tahansa pisteeseen v, niin on ainakin kaksi pistettä, jotka eivät ole v:n tavoitettavissa ajanhetkellä 2. Koska pisteestä s voidaan ajanhetkellä 2 lähettää viesti vain yhteen pisteeseen, niin ajanhetkellä 2 ei saavuteta kaikkia pisteitä. Siis $t(Q_3) > 2$.

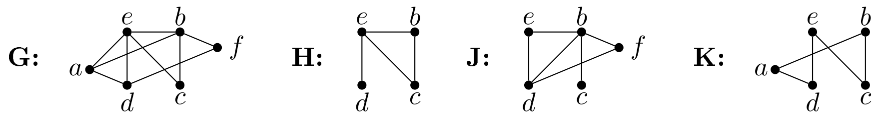
Kohtien (i) ja (ii) perusteella $t(Q_3) = 3$.

6. Juhlaan osallistuneista 9 henkilöstä useat tervehtivät toisiaan kopsauttamalla kyynärpäitään yhteen. Onko mahdollista, että jokainen osallistuja tervehti kopsautuksella täsmälleen seitsemää osallistujaa?

Ratk. Merkitään jokaista juhliin osallistunutta graafin pisteellä, ja jokaista kopsautusta juhlijoiden välillä vastaavien pisteiden välillä olevalla viivalla. Kysymys toisin: Onko olemassa suuntaamaton 9:n pisteen graafi, jonka jokaisen pisteen aste on 7?

Vastaus: Ei ole mahdollista. Perustelu: Graafin asteiden summa olisi $9 \cdot 7 = 63$, joka on pariton luku. Kättelylauseen (Lause 7.2.) mukaan tämä on mahdotonta.

7. Tarkastellaan alla olevia graafeja.



a) Mitkä graafeista ovat G:n aligraafeja? Mitkä niistä ovat G:n indusoituja aligraafeja?

b) Montako 5:n pituista graafin G polkua on pisteestä a pisteeseen f. Mikä on pisin kulku pisteestä a pisteeseen f?

c) Moniko K:n aligraafeista virittää K:n?

Ratk. a) H on indusoitu aligraafi $G[\{e, b, c, d\}]$.

J ei ole G:n aligraafi, sillä viiva $bd \in E_J$, mutta $bd \notin E_G$.

K on G:n aligraafi. K ei ole indusoitu aligraafi, sillä viiva $eb \notin E_K$, vaikka $eb \in E_G$ ja pisteet $e, b \in V_K$.

b) Graafin G 5:n pituiset polut $a \xrightarrow{*} f$:

$a \to d \to e \to c \to b \to f$

$a \to b \to c \to e \to d \to f$

Ei muita, eli 2 kpl.

Ei pisintä kulkua $a \xrightarrow{*} f$, sillä jokaista kokonaislukua n kohti on olemassa kulku

$a \to \overbrace{e \to a \to e \to a \to \cdots \to a}^{\text{Pituus } \geq n} \to e \to d \to f.$

c) Graafissa K on 5 viivaa. Jos K' on K:n virittävä aliraafi, niin jokaiselle viivalle e_1 joko $e_1 \in E_{K'}$ tai $e_1 \notin E_{K'}$. Erilaisia virittäviä aligraafeja on siis $2^5 = 32$ kpl.

8. Tarkastellaan edellisen tehtävän graafia G. Montako 6:n pituista kulkua on pisteestä a pisteeseen f?
Ratk.

Graafi taulukon avulla:

	a	b	c	d	e	f
a	0	1	0	1	1	1
b	1	0	1	0	1	1
c	0	1	0	0	1	0
d	1	0	0	0	1	1
e	1	1	1	1	0	0
f	1	1	0	1	0	0

Vastaava vieruspistematriisi: $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Nyt $M^6 = \begin{pmatrix} 408 & 376 & 224 & 316 & 376 & 316 \\ 376 & 378 & 204 & 316 & 346 & 284 \\ 224 & 204 & 124 & 172 & 204 & 172 \\ 316 & 316 & 172 & 266 & 284 & 234 \\ 376 & 346 & 204 & 284 & 378 & 316 \\ 316 & 284 & 172 & 234 & 316 & 266 \end{pmatrix}$,

joten 6:n pituisten kulkujen lukumäärä pisteestä a pisteeseen f on $M^6_{16} = 316$.

9. Piirrä yksi graafi, joka toteuttaa **kaikki** seuraavat ehdot:

(1) Graafissa on täsmälleen 3 komponenttia ja korkeintaan 11 pistettä.

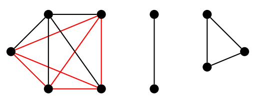
(2) Graafi sisältää täsmälleen kaksi pistettä joiden aste on 1.

(3) Graafi sisältää aligraafinaan täydellisen graafin K_5.

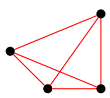
Määrää piirtämäsi graafin (piirrä erilleen) yhtenäinen indusoitu aligraafi jossa on täsmälleen 4 pistettä.

Ratk. Eräs ratkaisu:

G :



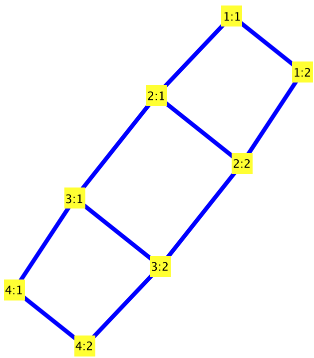
Yhtenäinen indusoitu aligraafi jossa on täsmälleen 4 pistettä:



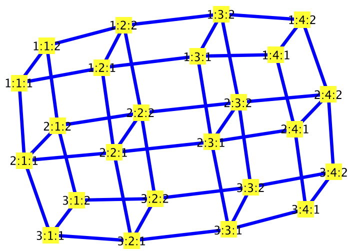
10. Piirrä graafit a) $P_2 \times P_4$, b) $P_3 \times P_2 \times P_4$ c) $P_2 \times C_3$ d) $K_2 + \overline{K_4}$.

Ratk

a) $P_2 \times P_4$:

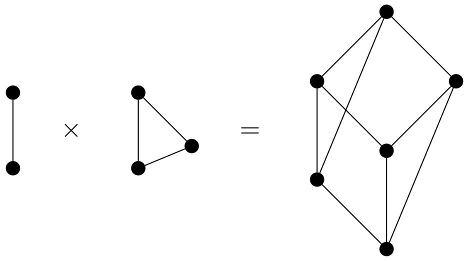


b) $P_3 \times P_2 \times P_4$:



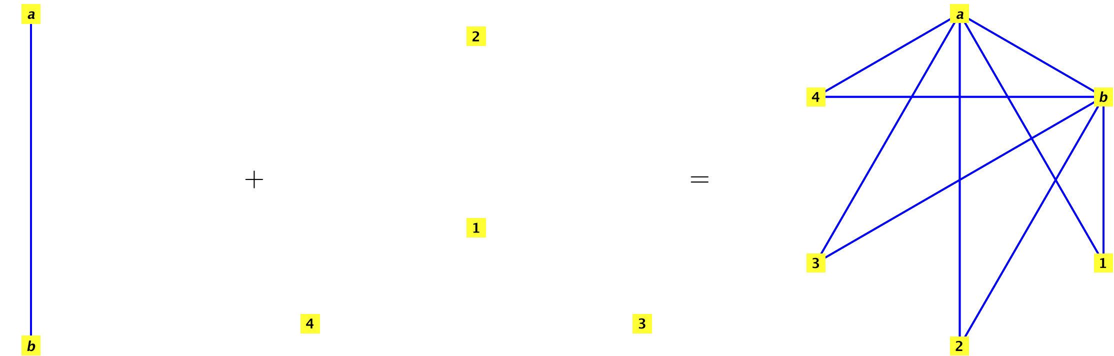
c)

P_2: C_3: $P_2 \times C_3$:



d)

K_2: $\overline{K_4}$: $K_2 + \overline{K_4}$:



11. Olkoon $\delta(G)$ graafin G pisteiden pienin aste, eli $\delta(G) = \min\{deg_G(v) | v \in V_G\}$. Osoita, että G sisältää $\delta(G)$:n pituisen polun. (Tarkastele graafin G pisintä polua.)

Ratk.Väite: G sisältää $\delta(G)$:n pituisen polun.

Tod. Jos $\delta(G) = 0$ (eli G sisältää irtopisteen), niin Väite on voimassa.

Voidaan olettaa, että $\delta(G) > 0$.

Olkoon $P : u \xrightarrow{*} v$ graafin G pisin polku.

Jos x on u:n naapuri ja x ei esiinny polussa P, niin polku

$xP : x \to u \xrightarrow{*} v$ on pidempi kuin P. Tämä on ristiriita, koska P oli pisin polku. Tällöin jokainen pisteen u naapuri esiintyy polussa P.

Siis $|P| > deg(u) \geq \delta(G)$.