TIETOTEKNIIKAN MATEMATIIKKA

Harjoitus 4 syksy 2021 Ratkaisut

1. a) Luettele seuraavat joukot alkioittain:
   (i) $\{z \in \mathbb{C}|\ \ z^4 = 5\}$ (ii) $\{x \in \mathbb{Q}|\ \ x(x^2-2)(2x+3)(x^2+9) = 0\}$
   (iii) $\{\frac{x}{y}|\ \ x \in \{0,1\}, y \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}\}$

   b) Kirjoita seuraavat joukot muodossa { lauseke | ehto }: (i) $\{-3, 7, -11, 15, -19, 23, \ldots\}$
   (ii) $\{\ 2, 5, 10, 17, 26, 37, \ldots\}$.

   Ratk. a) (i) $\{\pm 5^{\frac{1}{4}}, \pm 5^{\frac{1}{4}}\mathtt{i}\}$ (ii) $\{0, -\frac{3}{2}\}$ (iii) $\{0, \pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{4}, \ldots\}$.
   b) (i) $\{(-1)^n(4n-1)|\ \ n = 1, 2, 3 \ldots\}$ (ii) $\{n^2+1|\ \ n = 1, 2, 3, \ldots\}$.

2. Mitä ehtoja joukkojen M ja N tulee täyttää (kussakin kohdassa erikseen), jotta seuraavat väittämät olisivat tosia: a) $M \cup N = M$ b) $M \cap N = M$ c) $M \setminus N = M$ d) $M \setminus N = \emptyset$ e) $M \setminus N = N \setminus M$.

   Ratk. a) $N \subseteq M$. **b)** $M \subseteq N$ **c)** $M \cap N = \emptyset$. **d)** $M \subseteq N$ **e)** $M \setminus N = N \setminus M$. Oltava $M \setminus N = \emptyset$, eli $M \subseteq N$ ja $N \setminus M = \emptyset$, eli $N \subseteq M$. Siis $N = M$.

3. Kylässä on miespuolinen parturi, joka ajaa niiden ja vain niiden kylän miesten parran jotka eivät aja omaa partaansa. Ajaako parturi oman partansa?

   Ratk. Joukko-oppi ei aina ole niin yksinkertaista. Kts. esim. Wikipedia Russellin paradoksi.

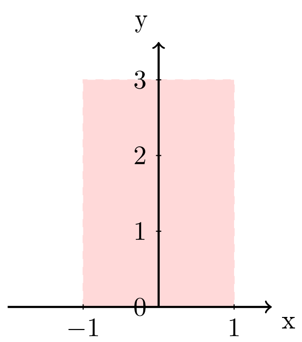
4. a) Olkoot $A = \{-1, 0, 1\}$ ja $B = \{2, 3\}$. Mitkä ovat joukot (i) $A \times B$ (ii) $B \times B$ (iii) $\mathbb{N} \times A$ (iv) $\{x \in \mathbb{R}|\ \ -1 \le x \le 1\} \times \{y \in \mathbb{R}|\ \ 0 \le y \le 3\}$.

   b) Televisiokatsojien säännöllisiä katsomistottumuksia tarkasteltiin kolmen televisiosarjan perusteella. Sarjat olivat: Taistelee tartunnan kanssa (=TTK), Piilotetut hetket (=SE) ja Divaaniomenat (=SP).Katsojien joukossa määriteltiin suhde R seuraavasti:

   $(x, y) \in R$ täsmälleen silloin kun katsoja x seuraa täsmälleen samoja sarjoja yllä mainituista sarjoista kuin katsoja y.

   Tutki onko R ekvivalenssisuhde katsojien joukossa. Jos on, niin todista, että R on ekvivalenssisuhde, ja määrää suhteen R ekvivalenssiluokat. Jos R ei ole ekvivalenssisuhde, niin perustele miksi ei.

   Ratk. a) (i) $A \times B = \{(-1,2), (-1,3), (0,2), (0,3), (1,2), (1,3)\}$.
   (ii) $B \times B = \{(2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\}$
   (iii) $\mathbb{N} \times A = \{(0,-1), (0,0), (0,1), (1,-1), (1,0), (1,1), (2,-1), (2,0), (2,1), \ldots\}$
   (iv) $\{x \in \mathbb{R}|\ \ -1 \le x \le 1\} \times \{y \in \mathbb{R}|\ \ 0 \le y \le 3\} = \{(x,y)|\ \ -1 \le x \le 1, 0 \le y \le 3\}$.



   b) (i) Selvästi jokainen seuraa itsensä kanssa samoja televisiosarjoja, eli $(x,x) \in R$ kaikilla $x \in U$, eli R on refleksiivinen.

   (ii) Jos $(x,y) \in R$, niin x ja y seuraavat samoja televisiosarjoja. Siis myös $(y,x) \in R$, eli R on symmetrinen.

   (iii) Jos $(x,y), (y,z) \in R$, niin selvästi x, y, z seuraavat samoja televisisarjoja. Eli $(x,z) \in R$, jolloin R on transitiivinen.

   Kohtien (i)-(iii) perusteella R on ekvivalenssirelaatio.

   Merkitään TTK, jos televisionkatsoja seuraa sarjaa TTK ja $\overline{TTK}$, jos televisionkatsoja ei seuraa sarjaa TTK. Käytetään samanlaista merkintää myös muille edellä mainituille sarjoille.

Merkitään $E_{X,Y,Z}$, missä $X \in \{TTK, \overline{TTK}\}$, $Y \in \{SE, \overline{SE}\}$ ja $Z \in \{SP, \overline{SP}\}$, ja esimerkiksi $E_{TTK,\overline{SE},SP}$ tarkoittaa niitä televisionkatsojia jotka seuraavat sarjoja TTK ja SP ja eivät seuraa sarjaa SE. Määritellään muut joukot vastaavasti. Silloin suhteen R ekvivalenssijoukot ovat:

$E_{\overline{TTK},\overline{SE},\overline{SP}}$, $E_{TTK,\overline{SE},\overline{SP}}$, $E_{\overline{TTK},SE,\overline{SP}}$, $E_{\overline{TTK},\overline{SE},SP}$, $E_{TTK,SE,\overline{SP}}$, $E_{TTK,\overline{SE},SP}$, $E_{\overline{TTK},SE,SP}$ ja $E_{TTK,SE,SP}$.

5. Olkoon $n \geq 1$ kokonaisluku. Ei-negatiivisille kokonaisluville a ja b on $a = b \bmod n$, jos ja vain jos a:lla ja b:llä on sama jakojäännös luvulla n jaettaessa. Olkoon R suhde ei-negatiivisten kokonaislukujen joukossa, jolle

   a) $(a, b) \in R$ jos ja vain jos $a = b \bmod 4$,

   b) $(a, b) \in R$ jos ja vain jos ($a = b \bmod 4$ tai $a = b \bmod 6$).

   Tutki molemmissa tapauksissa onko R ekvivalenssisuhde ei-negatiivisten kokonaislukujen joukossa. Jos on, niin määrää R:n ekvivalenssiluokat. Jos R ei ole ekvivalenssisuhde, niin perustele miksi ei.

   Ratk. a) Nyt $a = b \mod 4$ jos ja vain jos ($a = 4q_1 + r$ ja $b = 4q_2 + r$ jollakin kokonaisluvulla $0 \leq r \leq 3$).

   (i) Selvästi $a = a \mod 4$ kaikilla a, joten $(a, a) \in R$ kaikilla a, joten R on refleksiivinen.

   (ii) Jos $(a, b) \in R$, eli $a = 4q_1 + r$ ja $b = 4q_2 + r$ jollakin kokonaisluvulla $0 \leq r \leq 3$, niin varmasti on $b = 4q_2 + r$ ja $a = 4q_1 + r$. Siis $(b, a) \in R$, ja R on symmetrinen.

   (iii) Jos $(a, b) \in R$ ja $(b, c) \in R$, niin silloin $a = 4q_1 + r_1$ ja $b = 4q_2 + r_1$ jollakin kokonaisluvulla $0 \leq r_1 \leq 3$, ja $b = 4q_3 + r_2$ ja $c = 4q_4 + r_2$ jollakin kokonaisluvulla $0 \leq r_2 \leq 3$.

   Koska on oltava $4q_2 + r_1 = 4q_3 + r_2$, niin $r_1 = r_2$. Silloin on $a = c \mod 4$, eli $(a, c) \in R$.

   Siis R on transitiivinen.

   (i)-(iii) perusteella R on ekvivalenssisuhde.

   Ekvivalenssiluokat:

   $[0]_R = \{0, 4, 8, 12, \ldots\} = \{x | x = 4q + 0\}$

   $[1]_R = \{1, 5, 9, 13, \ldots\} = \{x | x = 4q + 1\}$

   $[2]_R = \{2, 6, 10, 14, \ldots\} = \{x | x = 4q + 2\}$

   $[3]_R = \{3, 7, 11, 15, \ldots\} = \{x | x = 4q + 3\}$

   b) $(a, b) \in R$ jos ja vain jos ($a = b \bmod 4$ tai $a = b \bmod 6$).

   Selvästi $(5, 9) \in R$, koska $5 = 1 \cdot 4 + 1$ ja $9 = 2 \cdot 4 + 1$.

   Myös $(9, 15) \in R$, koska $9 = 1 \cdot 6 + 3$ ja $15 = 2 \cdot 6 + 3$.

   Nyt $(5, 15) \notin R$, sillä $5 = 1 \cdot 4 + 1$, $15 = 3 \cdot 4 + 3$, ja $5 = 0 \cdot 6 + 5$ ja $15 = 2 \cdot 6 + 3$.

   Siis R ei ole transitiivinen, eikä siten ekvivalenssisuhde.

6. Olkoon R suhde kokonaislukujen joukossa $\mathbb{Z}$, jolle

   $$(u, v) \in R \text{ täsmälleen silloin kun } u + 3v = 4n \text{ jollakin kokonaisluvulla n.}$$

   Osoita, että R on ekvivalenssisuhde joukossa $\mathbb{Z}$ ja määrää suhteen R ekvivalenssiluokat.

   Ratk. (i) $u + 3u = 4u$ kaikilla $u \in \mathbb{Z}$, joten R on refleksiivinen.

   (ii) Jos $(u, v) \in R$, niin $u+3v = 4n$ jollakin kokonaisluvulla n. Silloin $3(u+3v) = 12n$, eli $3u+v+8v = 12n$. Siis $v + 3u = 12n - 8v = 4(3n - 2v)$. Koska n ja v ovat kokonaislukuja, niin $3n - 2v$ on kokonaisluku, eli $v + 3u = 3m$, siis $(v, u) \in R$. Suhde on symmetrinen.

   (iii) Jos $(u, v) \in R$ ja $(v, w) \in R$, niin $u + 3v = 4n$ ja $v + 3w = 4m$ joillakin kokonaisluvuilla n ja m. Silloin $(u + 3v) + (v + 3w) = 4n + 4m$, eli $u + 3w = 4n + 4m - 4v$. Siis $u + 3w = 4(n + m - v)$. Koska luvut n, m ja v ovat kokonaislukuja, niin $n + m - v$ on kokonaisluk, eli $(u, w) \in R$. Suhde on transitiivinen. Kohtien (i)-(iii) perusteella R on ekvivalenssisuhde.

   Ekvivalenssiluokat: Koska R on symmetrinen, niin $[u]_R = \{v | (u, v) \in R\} = \{v | (v, u) \in R\}$. Silloin

   $[0]_R = \{u | (u, 0) \in R\} = \{u | u + 3 \cdot 0 = 4n, n \in \mathbb{Z}\} = \{u | u = 4n, n \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -4, 0, 4, 8, 12, \ldots\}$

   $[1]_R = \{u | (u, 1) \in R\} = \{u | u+3 \cdot 1 = 4n, n \in \mathbb{Z}\} = \{u | u = 4n-3, n \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -3, 1, 5, 9, 13, 17, \ldots\}$

$[2]_R = \{u|(u,2) \in R\} = \{u|u + 3 \cdot 2 = 4n, n \in \mathbb{Z}\} = \{u|u = 4n - 6 = 4m - 2, m \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -2, 2, 6, 10, 14, 18, \ldots\}$

$[3]_R = \{u|(u,3) \in R\} = \{u|u + 3 \cdot 3 = 4n, n \in \mathbb{Z}\} = \{u|u = 4n - 9 = 4m - 1, m \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -1, 3, 7, 11, 15, 19, \ldots\}$

7. Vanhassa lasten pelissä kaksi pelaajaa valitsee kumpikin yhtäaikaa sovituin käsimerkin joko sakset, kiven tai paperin. Häviäjä saadaan selville seuraavien tietojen perusteella:
- kivi häviää paperille (paperi peittää kiven)
- sakset häviävät kivelle (kivi tylsyttää sakset)
- paperi häviää saksille (sakset leikkaavat paperia)

Jos pelaajat valitsivat saman esineen, niin kumpikaan ei hävinnyt.

Määritellään joukon $U = \{\text{sakset}, \text{kivi}, \text{paperi}\}$ suhde R seuraavasti:

$$(X, Y) \in R \text{ täsmälleen silloin kun } X \text{ ei häviä } Y\text{:lle.}$$

Onko suhde R refleksiivinen, symmetrinen, antisymmetrinen ja/tai transitiivinen ? Perustele vastauksesi

Ratk. Merkitään $S =$ Sakset, $P =$ Paperi ja $K =$ Kivi. Silloin $U = \{S, P, K\}$ ja suhde

$R = \{(S, S), (P, P), (K, K), (S, P), (P, K), (K, S)\}$.

$(S, S), (P, P), (K, K) \in R$, joten R on refleksiivinen.

$(S, P) \in R$ ja $(P, S) \notin R$, joten R ei ole symmetrinen

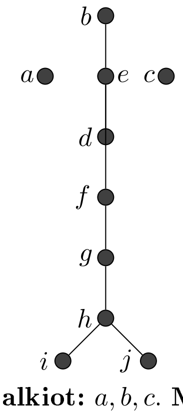
$(S, P) \in R$ ja $(P, S) \notin R$, $(P, K), \in R$ ja $(K, P) \notin R$ ja $(K, S) \in R$ ja $(S, K) \notin R$, joten R on antisymmetrinen.

$(S, P) \in R$, $(P, K) \in R$ ja $(S, K) \notin R$, joten R ei ole transitiivinen.

8. Määrää vähintään 10 alkiota sisältävä joukko A ja joukon A sellainen osittainjärjestys $\preceq$, että järjestyksellä $\preceq$ on joukossa A yhteensä 5 maksimaalista ja minimaalista alkiota, täsmälleen 3 maksimaalita ja täsmälleen 4 minimaalista alkiota. Piirrä määrittelemäsi osittainjärjestyksen $\preceq$ järjestyskuvio ja merkitse siihen kaikki minimaaliset ja maksimaaliset alkiot. Muodosta myös $\preceq$:n kanssa yhteensopiva joukon A jonojärjestys.

Ratk. Useita ratkaisuja. Esimerkiksi $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$.

Järjestyskuvio:



Maksimaaliset alkiot: a, b, c. **Minimaaliset alkiot:** a, c, i, j.

Yhteensopivia jonojärjestyksiä: (lueteltuna maksimista minimiin): $a, b, c, e, d, f, g, h, i, j$,

$b, e, d, f, g, h, i, j, b, a$ ja $b, e, d, a, f, g, h, c, i, j$.

9. Olkoon perusjoukkona U Tietotekniikan matematiikan 1. välikokeeseen syksyllä 2021 ajoissa ilmoittautuneet opiskelijat (eli se joukko jonka välikoe tarkastetaan). Määrää jokin joukon U suhde joka on antisymmetrinen ja transitiivinen, mutta ei ole osittainjärjestys.

Ratk. Eräs ratkaisu: $x \prec y$ täsmälleen silloin kun x:n kengännumero on pienempi kuin y:n. Selvästi aina kun $x \prec y$, niin $y \not\prec x$ eli suhde on antisymmetrinen. Suhde on myös transitiivinen. Koska $x \not\prec x$, aina kun $x \in U$ (yksikin x riittäisi), niin suhde ei ole refleksiivinen, eli $\prec$ ei ole osittainjärjestys joukossa U.