TIETOTEKNIIKAN MATEMATIIKKA

Harjoitus 3 syksy 2021 Ratkaisut

1. Osoita, että

$$(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})\cdots(1-\frac{1}{n})=\frac{1}{n}$$

aina kun $n = 2, 3, \ldots$

Ratk. Matemaattinen induktio:

Merkitään $P(n) :'' (1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})\cdots(1-\frac{1}{n})=\frac{1}{n}''$.

Väite: $P(n)$ on voimassa aina kun $n = 2, 3, \ldots$.

Tapaus P(2) : Nyt $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, joten $P(2)$ on voimassa.

Induktio-oletus: $P(k)$ on voimassa, eli $(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})\cdots(1-\frac{1}{k})=\frac{1}{k}$.

Induktioväite: $P(k+1)$ on voimassa, eli $(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})\cdots(1-\frac{1}{k+1})=\frac{1}{k+1}$.

Induktioväitteen todistus:

Nyt

$$\begin{aligned}(1-\tfrac{1}{2})(1-\tfrac{1}{3})\cdots(1-\tfrac{1}{k+1}) &= (1-\tfrac{1}{2})(1-\tfrac{1}{3})\cdots(1-\tfrac{1}{k})(1-\tfrac{1}{k+1})\\ &= \tfrac{1}{k}(1-\tfrac{1}{k+1})=\tfrac{1}{k}-\tfrac{1}{k(k+1)})=\tfrac{k+1}{k(k+1)}-\tfrac{1}{k(k+1)})\\ &= \tfrac{1}{k+1}\end{aligned}$$

Induktioväite on voimassa, joten myös $P(n)$ on voimassa aina kun $n = 2, 3, \ldots$.

2. Osoita matemaattisen induktion avulla:

Luku $6^n - 1$ on tasan jaollinen luvulla 5 aina kun $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Ratk. Merkitään: $P(n)$:"$6^n - 1$ on tasan jaollinen luvulla 5"

Tapaus $P(0)$**:** Nyt $6^0 - 1 = 0$, joka on tasan jaollinen luvulla 5 joten P(0) on voimassa.

Induktio-oletus: $P(k)$ on voimassa, eli $6^k - 1$ on tasan jaollinen luvulla 5.

Induktioväite: $P(k+1)$ on voimassa, eli $6^{k+1} - 1$ on tasan jaollinen luvulla 5.

Induktioväitteen todistus:

$6^{k+1} - 1 = 6 * 6^k - 1 = (1 + 5) * 6^k - 1 = 5 * 6^k + (6^k - 1)$.

Koska $5 * 6^k$ on tasan jaollinen luvulla 5 ja $6^k - 1$ on induktio-oletuksen perusteella tasan jaollinen luvulla 5, niin $5 * 6^k + (6^k - 1) = 6^{k+1} - 1$ on tasan jaollinen luvulla 5.

Induktioväite on voimassa, joten myös $P(n)$ on voimassa aina kun $n = 0, 1, 2, \ldots$.

3. Osoita matemaattisen induktion avulla, että $3^n > 2n$ aina kun $n = 1, 2, 3\ldots$.

Ratk.Väite: $3^n > 2n$ aina kun $n = 1, 2, 3, \ldots$

Tod. Matemaattinen induktio n:n suhteen. Merkitään $P(n) : 3^n > 2n$.

Koska $3^1 = 3$ ja $2 \cdot 1 = 2$, niin $P(1)$ on voimassa.

Induktio-oletus: $P(k) : 3^k > 2k$ on voimassa.

Osoitetaan, että $P(k+1) : 3^{k+1} > 2(k+1)$ on voimassa.

Nyt $3^{k+1} = 3 \cdot 3^k > 3 \cdot 2k = 2k + 4k > 2k + 4 = 2(k+1) + 2 > 2(k+1)$, eli $P(k+1)$ on voimassa.

Induktioperiaatteen perusteella on $P(n)$ voimassa kaikilla $k = 1, 2, 3, \ldots$, eli Väite on voimassa.

4. Neliön muotoinen alue on jaettu 7:llä vaakasuoralla viivalla 8:ksi nauhaksi. Kun alueen lävistää yksikin pystysuora viiva, saadaan suorakaiteen muotoisia ruutuja. Osoita että piirtämällä mielivaltaisen monta (ainakin yksi, mutta kuitenkin äärellinen määrä) pystysuoraa alueen leikkaavaa viivaa saadaan ruudukko, jonka ruudut voidaan värittää mustiksi ja valkoisiksi siten, että kahdella mustalla ruudulla ei ole yhteistä sivuviivaa eikä kahdella valkoisella ruudulla ole yhteistä sivuviivaa (saadaan shakkilautakuvio).

Ratk. Matemaattinen induktio. Olkoon $P(n)$: ”n:llä viivalla saadaan shakkilautakuvio”

Väite: $P(n)$ on voimassa aina kun $n = 1, 2, \ldots$.

Halkaisemalla yhdellä pystysuoralla viivalla 8 nauhaa ja värittämällä nauhat sopivasti saadaan shakkilautakuvio. Siis $P(1)$ on voimassa.

Induktio-oletus: $P(k)$ on voimassa

Induktioväite: $P(k+1)$ on voimassa.

Jaetaan nauhat $k+1$:llä pystysuoralla viivalla. Poistetaan yksi viivoista. Silloin nauhat on jaettu k:lla pystysuoralla viivalla.Induktio-oletuksen perusteella näin jaetut nauhat voidaan värittää shakkilautakuviolla. Jaetaan oikein väritetty vaakasuora nauhajoukko poistetulla viivalla. Uusi viiva jakaa joka nauhasta yhden suorakulmion kahtia. Uuden viivan vasemmalla puolella olevien suorakulmioiden värit pidetään ennallaan ja uuden viivan oikealla puolella olevien suorakulmioiden värit vaihdetaan. Saadaan shakkilautakuvio.

Siis $P(k+1)$ on voimassa, eli Väite on voimassa.

5. Joukkoa C_m, joka koostuu m:n merkin mittaisista 0:ia ja 1:siä käsittelevistä jonoista, sanotaan virheen havaitsevaksi, jos mitkä tahansa kaksi C_m:n jonoa poikkeavat toisistaan ainakin kahden merkkipaikan osalta toisistaan. Esimerkiksi joukko $C_3 = \{010, 100, 001\}$ on virheen havaitseva mutta joukko $C_3 = \{010, 001, 101\}$ ei ole koska jonot 001 ja 101 poikkeavat toisistaan vain ensimmäisen (=yhden) kirjainpaikan osalta. Osoita, että kun C_m:ssä on ainakin $2^{m-1}+1$ jonoa, niin C_m ei ole virheen havaitseva millään $m = 2, 3, 4, 5, \ldots$. Luettele kaikki C_2:t joissa 2^{2-1} $+1$ jonoa.

Ratk. C_2:t joissa $2^{2-1}+1 = 3$ jonoa: $\{00, 11, 01\}, \{00, 11, 10\}, \{01, 10, 00\}$ ja $\{01, 10, 11\}$.

Merkitään $P(n)$: "Jos joukossa C_n on ainakin $2^{n-1}+1$ jonoa, niin joukko ei ole virheen havaitseva".

Väite: $P(n)$ on voimassa aina kun $n = 2, 3, \ldots$.

$P(2)$ on voimassa, koska yllä ovat kaikki 2:n pituiset 3:n jonon joukot.

Yksikään niistä ei ole virheen havaitseva.

Induktio-oletus: $P(k)$ on voimassa.

Induktioväite: $P(k+1)$ on voimassa.

Induktioväitteen todistus. Olkoon C_{k+1}:ssä $2^{k+1-1}+1 = 2^k+1$ jonoa. Koska luku 2^k+1 on pariton ja koska jokainen jono alkaa joko merkillä 0 tai merkillä 1, niin joukossa C_{k+1} on joko 0:lla tai 1:llä alkavia jonoja ainakin $\frac{2^{k+1}}{2}+1 = 2^k+1$

kappaletta. Oletetaan, että 0:lla alkavia jonoja on ainakin 2^k+1 kappaletta (1 alkavat vastaavasti).

Olkoon $C_k = \{\alpha | 0\alpha \in C_{k+1}\}$, eli C_k:n jonot saadaan C_{k+1}:n 0:lla alkavista jonoista poistamalla edessä oleva 0.

Silloin C_k:ssa on $2^{k-1}+1$ erilaista k:n pituista jonoa. Induktio-oletuksen perusteella C_k ei ole virheen havaitseva. Silloin myöskään C_{k+1}:n 0:lla alkavien jonojen joukko ei ole virheen havaitseva. Siis C_{k+1} ei ole virheen havaitseva, eli $P(k+1)$ on voimassa.

Väite on voimassa.

6. Osoita, että

$$\sum_{i=1}^{m+n} i = (\sum_{i=1}^{m} i) + (\sum_{i=1}^{n} i) + mn$$

aina kun n ja m ovat luonnollisia lukuja.

Ratk. Olkoon $m \in \mathbb{N}$ mielivaltainen. Matemaattinen induktio luvun n suhteen.

Merkitään

$$P(n): \ '' \sum_{i=1}^{m+n} i = (\sum_{i=1}^{m} i) + (\sum_{i=1}^{n} i) + mn''.$$

Nyt

$$(\sum_{i=1}^{m} i) + (\sum_{i=1}^{0} i) + m \cdot 0 = (\sum_{i=1}^{m} i) + 0 + 0 = \sum_{i=1}^{m+0} i.$$

eli $P(0)$ on voimassa.

Induktio-oletus: $P(k)$ on voimassa, eli $\sum_{i=1}^{m+k} i = (\sum_{i=1}^{m} i) + (\sum_{i=1}^{k} i) + mk$.

Induktioväite. $P(k+1)$ on voimassa, eli $\sum_{i=1}^{m+k+1} i = (\sum_{i=1}^{m} i) + (\sum_{i=1}^{k+1} i) + m(k+1)$.

Induktioväitteen todistus. Nyt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m+k+1} i &= \left(\sum_{i=1}^{m+k} i\right) + (m+k+1) \\
&\overset{\text{ind.ol}}{=} \left(\sum_{i=1}^{m} i\right) + \left(\sum_{i=1}^{k} i\right) + mk + (m+k+1) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m} i\right) + \left(\sum_{i=1}^{k} i\right) + (k+1) + mk + m \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m} i\right) + \left(\sum_{i=1}^{k+1} i\right) + m(k+1).
\end{aligned}$$

Siis $P(k+1)$ on voimassa. Väite on voimassa.

7. Osoita matemaattisen induktion avulla, että vähintään 15 opiskelijan joukko voidaan aina jakaa ryhmiin, joissa jokaisessa on 4 tai 5 opiskelijaa.

Ratk. Matemaattinen induktio opiskelijoiden määrän suhteen.

$P(n)$: "$n = 4p + 5q$ joillakin kokonaisluvuilla p ja q "

Väite: $P(n)$ on voimassa aina kun $n = 15, 16, \ldots$.

$15 = 4 \cdot 0 + 5 \cdot 3$, joten $P(15)$ on voimassa.

Induktio-oletus: $P(i)$ on voimassa aina kun $i = 15, 16, 17 \ldots, k$.

Induktioväite: $P(k+1)$ on voimassa.

Induktioväitteen todistus: Nyt induktio-oletuksen perusteella $k + 1 = 4p + 5q + 1$ joillakin kokonaisluvuilla p ja q.

(1) Jos $p \geq 1$, niin $k+1 = 4(p-1)+5q+4+1 = 4(p-1)+5(q+1)$ eli Induktioväite on voimassa.

(2) Jos $p = 0$, niin koska $k \geq 15$, on $q \geq 3$. Silloin on $k+1 = 5(q-3)+15+1 = 5(q-3)+4\cdot 4$, eli Induktioväite on voimassa.

Kohtien (1) ja (2) perusteella Induktioväite on voimassa, eli Väite on voimassa.

8. Esitä a) luku $(545626)_{10}$ 7-kantaisena ja 19-kantaisena, b) luku $(1F0EBC)_{16}$ 11-kantaisena, c)$(10011111101101)_2$ okta- ja heksalukuna, d)heksaluku AEC934 binäärilukuna ja oktalukuna.

Ratk. a) Nyt

$$\begin{aligned}
545626 &= 77946 \cdot 7 + 4 \\
77946 &= 11135 \cdot 7 + 1 \\
11135 &= 1590 \cdot 7 + 5 \\
1590 &= 227 \cdot 7 + 1 \\
227 &= 32 \cdot 7 + 3 \\
32 &= 4 \cdot 7 + 4 \\
4 &= 0 \cdot 7 + 4
\end{aligned}$$

Eli $(545626)_{10} = (4431514)_7$

$$\begin{aligned}
545626 &= 28717 \cdot 19 + 3 \\
28717 &= 1511 \cdot 19 + 8 \\
1511 &= 79 \cdot 19 + 10 \\
79 &= 4 \cdot 19 + 3 \\
4 &= 0 \cdot 19 + 4
\end{aligned}$$

Eli $(545626)_{10} = (43A83)_{19}$.

b) $(1F0EBC)_{16} = (1\cdot 16^5 + 15\cdot 16^4 + 0\cdot 16^3 + 14\cdot 16^2 + 11\cdot 16 + 12\cdot 16^0)_{10} = (2035388)_{10} = (1170243)_{11}$

c) $(10011111101101)_2 = 010\ 011\ 111\ 101\ 101 = (23755)_8$.

$(10011111101101)_2 = 0010\ 0111\ 1110\ 1101 = (27ED)_{16}$

d) $(AEC934)_{16} = (1010\ 1110\ 1100\ 1001\ 0011\ 0100)_2 = (101\ 011\ 101\ 100\ 100\ 100\ 110\ 100)_2$
$= (53544464)_8$

9. 16-järjestelmän luvut ovat $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F$. Luku $X = (AB90)_{16}$ ja luku $Y = (23BCD)_{16}$. Lausu luvut X ja Y 10-järjestelmässä ja laske sen jälkeen erotukset $X - Y$ ja $Y - X$ käyttäen vähennyslaskua ilman lainaamista. Laskut on tehtävä 10-järjestelmässä. Kaikki laskut on esitettävä.

Ratk. Nyt $X = (AB90)_{16} = (10 \cdot 16^3 + 11 \cdot 16^2 + 9 \cdot 16 + 0)_{10} = (43920)_{10}$ ja

$Y = (23BCD)_{16} = (2 \cdot 16^4 + 3 \cdot 16^3 + 11 \cdot 16^2 + 12 \cdot 16 + 13)_{10} = (146381)_{10}$.

$\mathbf{X} - \mathbf{Y} = 043920 - 146381 = 043920 + (999999 - 146381 + 1) - 1000000$. Nyt $Y^* = 999999 - 146381 = 853618$, ja $Y^{**} = Y^* + 1 = 853618 + 1 = 853619$.

Silloin $X + Y^{**} = 043920 + 853619 = 897539$. Ei ylivuotoa, joten $X - Y < 0$.

Silloin $X - Y = -(X + Y^{**})^{**} = -(999999 \ - 897539 \ + \ 1)$

$= -(102460 \ + \ 1) = -102461$.

$\mathbf{Y} - \mathbf{X} = 146381 - 043920 = 146381 + (999999 - 043920 + 1) - 1000000 = 146381 + X^{**} \ - 1000000$

$X^* = 999999 \ - \ 043920 = 956079$ ja $X^{**} = X^* + 1 = 956080$

$Y + X^{**} = 1102461$.

joten $Y - X = 1102461 - 1000000 = 102461$.

10. Kun 16-järjestelmän luvut ovat suuruusjärjestyksessä 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F ja luku $X = (8946AF)_{16}$ ja $Y = (F347)_{16}$, niin laske erotus $X - Y$ käyttäen vähennyslaskua ilman lainaamista. Laskut on tehtävä 16-järjestelmässä. Kaikki laskut on esitettävä.

Ratk. $X = 8946AF, Y = 00F347$.

$Y^* = FFFFFF - Y = FFFFFF - 00F347 = FF0CB8$.

$Y^{**} = FF0CB8 + 1 = FF0CB9$.

$X + Y^{**} = 8946AF + FF0CB9 = 1885368$. Ylivuoto, joten $X - Y = 885368$.

11. 2-järjestelmän luvut ovat suuruusjärjestyksessä 0 ja 1 ja vastaavasti 16-järjestelmän luvut ovat $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F$. Luku $X = (1010101001111110)_2$ ja luku $Y = (110010111000)_2$. Lausu luvut X ja Y 16-järjestelmässä. Laske sen jälkeen erotus $Y - X$ käyttäen vähennyslaskua ilman lainaamista. Laskut on tehtävä 16-järjestelmässä. Kaikki laskut on esitettävä.

Ratk.) Nyt $X = (1010\ 1010\ 0111\ 1110)_2 = (AA7E)_{16}$ ja $Y = (1100\ 1011\ 1000)_2 = (CB8)_{16} = (0CB8)_{16}$

$Y - X = 0CB8 - AA7E = 0CB8 + (FFFF - AA7E + 1) - 10000 = 0CB8 + (X^* + 1) - 1000 = 0CB8 + X^{**} - 10000$.

$X^* = FFFF - AA7E = 5581$ ja $X^{**} = X^* + 1 = 5582$. $Y + X^{**} = 623A$. Ei ylivuotoa, joten $Y - X < 0$.

$Y - X = Y + X^{**} - 10000 = -(10000 - (Y + X^{**}) = -(1 + FFFF - (Y + X^{**}))$.

eli $Y - X = -(1 + (Y + X^{**})^*) = -(Y + X^{**})^{**}$

$(X + Y^{**})^* = FFFF - 623A = 9DC5$

$(X + Y^{**})^{**} = 9DC5 + 1 = 9DC6$

Siis $Y - X = -9DC6$.