

TIETOTEKNIIKAN MATEMATIIKKA

Harjoitus 3 syksy 2021

1. Osoita, että

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

aina kun $n = 2, 3, \dots$

2. Osoita matemaattisen induktion avulla:

Luku $6^n - 1$ on tasan jaollinen luvulla 5 aina kun $n = 0, 1, 2, \dots$

3. Osoita matemaattisen induktion avulla, että $3^n > 2n$ aina kun $n = 1, 2, 3, \dots$

4. Neliön muotoinen alue on jaettu 7:llä vaakasuoralla viivalla 8:ksi nauhaksi. Kun alueen lävistää yksikin pystysuora viiva, saadaan suorakaiteen muotoisia ruutuja. Osoita että piirtämällä mielivaltaisen monta (ainakin yksi, mutta kuitenkin äärellinen määrä) pystysuoraa alueen leikkaavaa viivaa saadaan ruudukko, jonka ruudut voidaan värittää mustiksi ja valkoisiksi siten, että kahdella mustalla ruudulla ei ole yhteistä sivuviivaa eikä kahdella valkoisella ruudulla ole yhteistä sivuviivaa (saadaan shakkilautakuvio).

5. Joukkoa C_m , joka koostuu m :n merkin mittaisista, merkkejä 0 ja 1 sisältävistä jonoista, sanotaan virheen havaitsevaksi, jos mitkä tahansa kaksi C_m :n jonoa poikkeavat toisistaan ainakin kahden merkkipaikan osalta toisistaan. Esimerkiksi joukko $C_3 = \{010, 100, 001\}$ on virheen havaitseva mutta joukko $C_3 = \{010, 001, 101\}$ ei ole koska jonot 001 ja 101 poikkeavat toisistaan vain ensimmäisen (=yhdessä) kirjainpaikan osalta. Osoita, että kun C_m :ssä on ainakin $2^{m-1} + 1$ jonoa, niin C_m ei ole virheen havaitseva millään $m = 2, 3, 4, 5, \dots$. Luettele kaikki C_2 :t joissa $2^{2-1} + 1$ jonoa.

6. Osoita, että

$$\sum_{i=1}^{m+n} i = \left(\sum_{i=1}^m i\right) + \left(\sum_{i=1}^n i\right) + mn$$

aina kun n ja m ovat luonnollisia lukuja.

7. Osoita matemaattisen induktion avulla, että vähintään 15 opiskelijan joukko voidaan aina jakaa ryhmiin, joissa jokaisessa on 4 tai 5 opiskelijaa.

8. Esitä a) luku $(545626)_{10}$ 7-kantaisena ja 19-kantaisena, b) luku $(1F0EBC)_{16}$ 11-kantaisena, c) $(1001111101101)_2$ okta- ja heksalukuna, d) heksaluku AEC934 binäärilukuna ja oktaalukuna.

9. 16-järjestelmän luvut ovat 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F. Luku $X = (AB90)_{16}$ ja luku $Y = (23BCD)_{16}$. Lausu luvut X ja Y 10-järjestelmässä ja laske sen jälkeen erotukset $X - Y$ ja $Y - X$ käyttäen vähennyslaskua ilman lainaamista. Laskut on tehtävä 10-järjestelmässä. Kaikki laskut on esitettävä.

10. Kun 16-järjestelmän luvut ovat suuruusjärjestyksessä 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F ja luku $X = (8946AF)_{16}$ ja $Y = (F347)_{16}$, niin laske erotus $X - Y$ käyttäen vähennyslaskua ilman lainaamista. Laskut on tehtävä 16-järjestelmässä. Kaikki laskut on esitettävä.

11. 2-järjestelmän luvut ovat suuruusjärjestyksessä 0 ja 1 ja vastaavasti 16-järjestelmän luvut ovat 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F. Luku $X = (101010100111110)_2$ ja luku $Y = (110010111000)_2$. Lausu luvut X ja Y 16-järjestelmässä. Laske sen jälkeen erotus $Y - X$ käyttäen vähennyslaskua ilman lainaamista. Laskut on tehtävä 16-järjestelmässä. Kaikki laskut on esitettävä.