TIETOTEKNIIKAN MATEMATIIKKA

Harjoitus 2 syksy 2021 Ratkaisuja

1. Osoita resoluutiomenettelyllä (jos mahdollista), että $\{A \vee (B' \wedge C), (A \vee D)'\} \models B'$.

   Ratk. Vastaava päättely: $\{A \vee (B' \wedge C), (A \vee D)', B\} \models 0$.

   Konjunktit: $A \vee (B' \wedge C) = (A \vee B') \wedge (A \vee C)$. Siis $C_1 = A \vee B'$ ja $C_2 = A \vee C$.

   $(A \vee D)' = A' \wedge D'$. Siis $C_3 = A'$ ja $C_4 = D'$.

   $C_5 = B$.

   Vastaava päättely: $\{C_1, C_2, \ldots, C_5\} \models 0$

   C_1 ja C_5: $A = C_6$.

   C_3 ja C_6: 0.

   Resoluutiomenettely pysähtyy, koska 0 saatiin pääteltyä.

   Silloin $\{C_1, C_2, \ldots, C_5\} \models 0$, eli myös

   $\{A \vee (B' \wedge C), (A \vee D)'\} \models B'$.

2. Osoita resoluutiomenettelyllä (jos mahdollista), että

   a) $\{(B \to C')', F, ((B \wedge C) \to A) \wedge (C \vee D' \vee F')\} \models A$

   b)$\{A \to (B \to C), A \vee D, (E \vee D) \to B\} \models (C' \to E')$

   Perustele vastauksesi. Merkitse tarkasti näkyviin resoluutiomenettelyn eri vaiheet.

   Ratk. a) Vastaava päättely: $\{(B \to C')', F, ((B \wedge C) \to A) \wedge (C \vee D' \vee F'), A'\} \models 0$ Konjunktit: $(B \to C')' = (B' \vee C')' = B \wedge C$, $C_1 = B, C_2 = C$.

   $F = C_3$

   $((B \wedge C) \to A) \wedge (C \vee D' \vee F') = (B' \vee C' \vee A) \wedge (C \vee D' \vee F')$, $C_4 = B' \vee C' \vee A$ ja $C_5 = C \vee D' \vee F'$,

   $A' = C_6$.

   Vastaava päättely: $\{C_1, C_2, \ldots, C_6\} \models 0$

   C_1 ja C_4: $C' \vee A = C_7$.

   C_6 ja C_7: $C' = C_8$.

   C_2 ja C_8: 0.

   Resoluutiomenettely pysähtyy, koska 0 saatiin pääteltyä.

   Silloin $\{C_1, C_2, \ldots, C_6\} \models 0$, eli myös

   $\{(B \to C')', F, ((B \wedge C) \to A) \wedge (C \vee D' \vee F'), A'\} \models 0$ ja siis

   $\{(B \to C')', F, ((B \wedge C) \to A) \wedge (C \vee D' \vee F')\} \models A$.

   b) Vastaava päättely:

   $$\{A \to (B \to C), A \vee D, (E \vee D) \to B, (C' \to E')'\} \models 0$$

   Nyt $A \to (B \to C) = A' \vee B' \vee C = C_1$.

   $A \vee D = C_2$,

   $(E \vee D) \to B = (E \vee D)' \vee B) = (E' \wedge D') \vee B = (E' \vee B) \wedge (D' \vee B)$, eli $E' \vee B = C_3$ ja $D' \vee B = C_4$.

   $(C' \to E')' = (C \vee E')' = C' \wedge E$, eli $C' = C_5$ ja $E = C_6$.

   Vastaava päättely $\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\} \models 0$.

   Resoluutiosääntöä soveltamalla:

   C_3 ja C_6: $B = C_7$.

   C_7 ja C_1: $A' \vee C = C_8$.

   C_8 ja C_5: $A' = C_9$.

   C_9 ja C_2: $D = C_{10}$.

   C_5 ja C_1: $A' \vee B = C_{11}$.

   C_{11} ja C_2: $B \vee D = C_{12}$.

   Ei muita.

   Resoluutiomenettely pysähtyy, eikä 0:aa saatu pääteltyä. Siis

   $\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\} \not\models 0$, eli $\{A \to (B \to C), A \vee D, (E \vee D) \to B\} \not\models (C' \to E')$.

3. Muunna alla oleva päättely symbolimuotoon. Osoita sen jälkeen päättelyn oikeellisuus tai muodosta vastaesimerkki joka osoittaa, että päättely on virheellinen.

Oletukset: Jos menet naimisiin, niin kadut. Jos et mene naimisiin, niin sitäkin kadut.

Johtopäätös: Jos siis menet naimisiin tai olet menemättä, niin joka tapauksessa kadut.

Ratk. Olkoot A: "Menet naimisiin" ja B: "Kadut". Päättely $\{A \to B, A' \to B\} \vDash (A \vee A') \to B$.

Vastaava päättely: $\{A \to B, A' \to B, [(A \vee A') \to B]'\} \vDash 0$.

Konjunktit: $A \to B = A' \vee B = C_1$,

$A' \to B = A \vee B = C_2$,

$[(A \vee A') \to B]' = [(A \vee A')' \vee B]' = [(1)' \vee B]' = (0 \vee B)' = B' = C_3$.

Vastaava päättely: $\{C_1, C_2, C_3\} \vDash 0$

C_1 ja C_2: $C_4 = B$.

C_3 ja C_4: $C_5 = 0$.

Resoluutiomenettely pysähtyy ja koska 0 saatiin pääteltyä, niin päättely on oikein.

4. Olkoon perusjoukkona U kaikki maailman ihmiset. Käytetään seuraavia predikaatteja: $M(x)$ = "x käyttää maskia.", $T(x,y)$ = "x haluaa tartuttaa y:n.", $L(x)$ = "x osallistuu luennolle.", $E(x)$ = "x pitää koronaetäisyydet.", ja seuraavaa alkiota perusjoukosta LL: "Lauri Luennoija".

Kirjoita lauseet 1)-3) merkkimuotoon

1) "Kukaan ei halua tartuttaa ketään."

2) "Ei ole totta, että jokainen maskia käyttävä luennolle osallistuja haluaa tartuttaa jonkin luennolle osallistujan."

3) "Jos Lauri Luennoija pitää maskia tai pitää koronaetäisyydet, niin luennolla on ainakin yksi maskia käyttävä koronaetäisyydet pitävä osallistuja, jota hän ei halua tartuttaa."

Ratk. 1) $\forall x \forall y T'(x,y)$ tai $(\exists x \exists y T(x,y))'$

2) $[\forall x(M(x) \wedge L(x)) \to (\exists y(L(y) \wedge T(x,y)))]'$

3) $(K(LL) \vee E(LL)) \to [\exists x(M(x) \wedge L(x) \wedge E(x) \wedge T'(LL,x))]$

5. Olkoon perusjoukkona U kaikki maailman ihmiset. Käytetään seuraavia predikaatteja: $V(x)$ = "x haluaa voittaa vaalit", $P(x)$ = "x on presidentti", $S(x,y)$ = "x solvaa y:tä.", $J(x)$ = "x jakaa valtion varoja", $K(x)$ = "x kertoo vaihtoehtoisia totuuksia", ja seuraavia alkiota perusjoukosta D: "Aku"ja Joe: "Jussi". Kirjoita lauseet a)-c) merkkimuotoon.

a) "Jokainen vaalien voittamista haluava presidentti jakaa valtion varoja."

b) "Aku ei halua voittaa vaaleja, jos on olemassa yksi vaihtoehtoisia totuuksia kertova presidentti jota Aku ei solvaa."

c) "Jos Jussi haluaa voittaa vaalit, niin hän joutuu ainakin yhden vaalien voittamista haluavan vaihtoehtoisia totuuksia kertovan presidentin solvaamaksi."

Ratk. a) $\forall x[(V(x) \wedge P(x)) \to J(x)]$

b) $[\exists x(P(x) \wedge S'(Aku,x) \wedge K(x))] \to V'(D)$

c) $V(Joe) \to [\exists x(P(x) \wedge V(x) \wedge K(x) \wedge S(x, Joe))]$

6. Ovatko seuraavat lauseet tosia vai epätosia? a) $\exists x[x^3 = -1]$, $U = \mathbb{Z}$. b) $\forall x[-x < x]$, $U = \mathbb{Z}$ c) $\forall x \exists y(xy = 1)$,$U = \mathbb{Z}$. d) $\forall x[(x \in \mathbb{Z}) \to (3x \notin \mathbb{Z})]$,$U = \mathbb{R}$.

Ratk. a) $(-1)^3 = -1$ ja $-1 \in \mathbb{Z}$, joten lause tosi. **b)** Koska $-(-1) = 1 > -1$, niin lause on epätosi. **c)** Nyt $2 \in \mathbb{Z}$, mutta $2y = 1$ täsmälleen silloin kun $y = \frac{1}{2}$ (ei siis muilla y:n arvoilla). Koska $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, niin lause on epätosi **d)** Nyt $1 \in \mathbb{Z}$ ja $3 \cdot 1 = 3 \in \mathbb{Z}$, joten lause $(1 \in \mathbb{Z}) \to (3 \notin \mathbb{Z})$ on epätosi. Siis alkuperäinen lause on epätosi.

7. Määrää seuraavien lauseiden totuusarvo: 1) $\forall x \exists y(x^y > 9)$, 2) $\exists x \forall y((x-y) < 3)$, kun perusjoukko $U = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$. Perustele vastauksesi.

Ratk. b1) $1^y = 1 < 9$ aina kun $y \in U$. Lause on epätosi.

b2) Nyt $1 - y < 3$ aina kun $y \in U$. Lause on tosi.

8. Olkoot $P(x, y)$ kaksipaikkainen predikaatti. Onko $(\forall x P(x, x)) \to (\forall x \forall y P(x, y))$ validi lause? Perustele vastauksesi.

Ratk. Valitaan perusjoukko $U = \mathbb{R}$ ja predikaatti $P(x, y)$: "$x = y$". Nyt x=x jokaisella reaaliluvulla x, joten $\forall x P(x, x)$ on tosi. $1 \neq 2$, joten $P(1, 2)$ on epätosi, joten $\forall x \forall y P(x, y)$ on epätosi.

Siis tällä tulkinnalla lause $(\forall x P(x, x)) \to (\forall x \forall y P(x, y))$ on epätosi, joten se ei ole validi lause.

9. Kirjoita seuraava predikaattilogiikan lause disjunktiiviseen ja konjunktiiviseen Prenex normaalimuotoon.

$\{\forall x[P(x) \vee Q(x)]\} \to \{[\forall x P(x)] \vee \forall x Q(x)\}$.

Ratk.DPNF-muoto:

$\{\forall x[P(x) \vee Q(x)]\} \to \{[\forall x P(x)] \vee [\forall x Q(x)]\}$

$\equiv \{\forall x[P(x) \vee Q(x)]\} \to \{[\forall y P(y)] \vee [\forall z Q(z)]\}$

$\equiv \{\forall x[P(x) \vee Q(x)]\}' \vee \{[\forall y P(y)] \vee [\forall z Q(z)]\}$

$\equiv \{\exists x[P'(x) \wedge Q'(x)]\} \vee \{[\forall y P(y)] \vee [\forall z Q(z)]\}$

$\equiv \exists x\{[P'(x) \wedge Q'(x)] \vee \{\forall y[\forall z(P(y) \vee Q(z))]\}\}$

$\equiv \exists x \forall y\{[P'(x) \wedge Q'(x)] \vee \{[\forall z(P(y) \vee Q(z))]\}\}$

$\equiv \exists x \forall y \forall z\{[P'(x) \wedge Q'(x)] \vee [P(y)] \vee [Q(z)]\}$.

CPNF-muoto:

$\{\forall x[P(x) \vee Q(x)]\} \to \{[\forall x P(x)] \vee \forall x Q(x)\}$

$\overset{\text{kuten edellä}}{\equiv} \exists x \forall y \forall z\{[P'(x) \wedge Q'(x)] \vee [P(y) \vee Q(z)]\}$

$\equiv \exists x \forall y \forall z\{[P'(x) \vee P(y) \vee Q(z)] \wedge [Q'(x) \vee P(y) \vee Q(z)]\}$.