

TIETOTEKNIIKAN MATEMATIIKKA

Harjoitus 1 syksy 2021 Ratkaisut

1. Mitkä seuraavista luonnollisen kielen lauseista ovat lauseita logiikan kannalta?

- a) "Covid-19 on koronavirus." b) "EU järjestää riittävän määrän rokotteita." c) "Koska minut rokotetaan?" d) " $x^5 = 32$ (x on reaalityyppi)." *(Note: The original text says 'luku' but it's clearly a typo for 'tyyppi')*

Ratk. Lauseita logiikan kannalta ovat a) ja b). Muut eivät ole. Lause c) on kysymys. d) Tosi kun $x = 2$, epätosi muulloin. Ei yksikäsitteistä totuusarvoa.

2. Lausu alla olevat lauseet alkeislauseiden ja toimitusten avulla merkkimuotoisina. Mitkä ovat alkeislauseiden totuusarvot, kun jokainen lauseista (1)-(3) on tosi?

- (1) "Jos ihmiset haluavat olla hyviä, niin he haluavat olla hyviä koko ajan."
 (2) "Ihmiset haluavat olla liian hyviä, jos he haluavat olla hyviä koko ajan."
 (3) "Ihmiset eivät halua olla liian hyviä."

Ratk. Alkeislauseet: A : "Ihmiset haluavat olla hyviä." B : "Ihmiset haluavat olla hyviä koko ajan." C : "Ihmiset haluavat olla liian hyviä."

Lauseet merkkimuotoisina: **(1)** $A \rightarrow B$ **(2)** $B \rightarrow C$ **(3)** C' .

Totuustaulukko alkeislauseille:

A	B	C	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow C$	C'	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \wedge C'$
T	T	T	T	T	E	E
T	T	E	T	E	T	E
T	E	T	E	T	E	E
T	E	E	E	T	T	E
E	T	T	T	T	E	E
E	T	E	T	E	T	E
E	E	T	T	T	E	E
E	E	E	T	T	T	T

Kaikki kolme lausetta ovat tosia vain totuustaulun alimmalla rivillä, joten kaikki alkeislauseet ovat epätosia.

3. Lausu tehtävän 2 lauseiden (1) ja (2) negaatiot merkkimuotoisena ja luonnollisella kielellä mahdollisimman yksinkertaisesti. Vastaukseksi ei kelpaa "Ei ole totta, että ...".

Ratk. **(1)** $(A \rightarrow B)' = (A' \vee B) = A \wedge B'$ "Ihmiset haluavat olla hyviä, mutta eivät koko ajan."
(2) $(B \rightarrow C)' = B' \vee C'$ "Ihmiset eivät halua olla hyviä koko ajan tai eivät halua olla liian hyviä".

4. Muodosta totuustaulu seuraavalle lauseelle. Onko lause tautologia? $[A \rightarrow (B \vee C)] \rightarrow [(A \rightarrow B') \wedge (A \rightarrow C)]$

Ratk.

A	B	C	$B \vee C$	$A_1 = A \rightarrow (B \vee C)$	B'	$A_2 = A \rightarrow B'$	$A_3 = A \rightarrow C$	$A_2 \wedge A_3$	$A_1 \rightarrow (A_2 \wedge A_3)$
T	T	T	T	T	E	E	T	E	E
T	T	E	T	T	E	E	E	E	E
T	E	T	T	T	T	T	T	T	T
T	E	E	E	E	T	T	E	E	T
E	T	T	T	T	E	T	T	T	T
E	T	E	T	T	E	T	T	T	T
E	E	T	T	T	T	T	T	T	T
E	E	E	E	T	T	T	T	T	T

Lause on epätosi eräillä alkeislauseiden totuusarvoilla. Lause ei ole tautologia.

5. Määritellään toimitus $|$ oheisella totuustaululla. Määrää lauseen $A|B$ kanssa yhtäpitävä lause, missä on käytetty vain toimituksia \vee ja $'$. Osoita lauseen $A|B$ ja keksimäsi lauseen yhtäpitävyys totuustaulujen avulla. (3p)

A	B	$A B$
T	T	E
T	E	T
E	T	T
E	E	E

Ratk. Useita oikeita ratkaisuja. Eräs: $A|B = (A \wedge B') \vee (A' \wedge B) = (A' \vee B) \vee (A \vee B)'$

A	B	A'	B'	$A' \vee B$	$L_1 = (A' \vee B)'$	$A \vee B'$	$L_2 = (A \vee B)'$	$L_1 \vee L_2$	$A B$
T	T	E	E	T	E	T	E	E	E
T	E	E	T	E	T	T	E	T	T
E	T	T	E	T	E	E	T	T	T
E	E	T	T	T	E	T	E	E	E

6. Olkoot A ja B alkeislauseita, joille lause $(A \rightarrow B)' \rightarrow A'$ on epätosi. Määrittää lauseiden a) $B \leftrightarrow A$ b) $B \rightarrow A'$ c) $B \rightarrow [(A \vee C) \wedge D'] \rightarrow (C' \vee B')$ totuusarvo.

Ratk. Nyt $(A \rightarrow B)' \rightarrow A' = (A \rightarrow B) \vee A' = (A' \vee B) \vee A' = A' \vee B$. Koska lause $(A \wedge B') \rightarrow A'$ on epätosi, on myös lause $A' \vee B$ epätosi. Siis A on tosi ja B on epätosi.

a) Koska lauseilla A ja B on eri totuusarvo, niin lause $B \leftrightarrow A$ on epätosi.

b ja c) Koska B on epätosi, niin mikä tahansa lause muotoa $B \rightarrow C$ on tosi. Siis kohtien b) ja c) lauseet ovat tosia.

7. Muodosta yhdistetty lause, joka on epätosi, kun ainakin kaksi alkeislauseista A , B , ja C on epätosia ja tosi muulloin, ja joka sisältää vain toimituksia $'$, \wedge ja \vee .

Ratk. Useita oikeita ratkaisuja. Eräs: $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$.

8. Tien risteyksessä istuskelee kaksi miestä. Toinen miehistä on Rehti-Risto, joka puhuu aina totta ja toinen on Retku-Reino joka aina valehtelee. Olet eksynyt, etkä tiedä onko kaupunki oikealle vai vasemmalle menevän tien suunnassa, vievätkö molemmat tiet kaupunkiin vai eikö kumpikaan tie vie kaupunkiin. Et myöskään tiedä, kumpi miehistä on Rehti-Risto ja kumpi Retku-Reino. Kysyessäsi heiltä miten kaupunkiin pääsee, ensimmäinen vastaa "Vasemmanpuoleinen tie vie kaupunkiin ja oikeanpuoleinen ei". Toisen vastaus on "Toinen tie vie kaupunkiin ja toinen ei". Kumpaa tietä lähdet kulkemaan päästäksesi kaupunkiin vai käännätkö takaisin?

Ratk. ...

9. Määrittää DNF ja CNF muoto seuraaville lauselogiikan lauseille:

a) $(A \rightarrow B) \leftrightarrow C$

b) $((A \wedge B) \rightarrow (C \vee D)) \wedge (F \vee G)'$.

Ratk. a) DNF muoto:

$$\begin{aligned} (A \rightarrow B) \leftrightarrow C &= (A' \vee B) \leftrightarrow C = [(A' \vee B) \rightarrow C] \wedge [C \rightarrow (A' \vee B)] \\ &= [(A' \vee B)' \vee C] \wedge [C' \vee (A' \vee B)] = [(A \wedge B') \vee C] \wedge [C' \vee (A' \vee B)] \\ &= [(A \wedge B') \wedge (C' \vee (A' \vee B))] \vee [C \wedge (C' \vee (A' \vee B))] \\ &= (A \wedge B' \wedge C') \vee \overbrace{[(A \wedge B') \wedge (A' \vee B)]}^{\text{aina epätosi}} \vee \overbrace{[C \wedge C']}_{\text{aina epätosi}} \vee (C \wedge (A' \vee B)) \\ &= (A \wedge B' \wedge C') \vee 0 \vee 0 \vee (C \wedge A') \vee (C \wedge B) \\ &= (A \wedge B' \wedge C') \vee (C \wedge A') \vee (C \wedge B) \end{aligned}$$

CNF muoto: $(A \rightarrow B) \leftrightarrow C = (A' \vee B) \leftrightarrow C = \dots = (A \vee C) \wedge (C \vee B') \wedge (B \vee A' \vee C')$

b) DNF muoto: $((A \wedge B) \rightarrow (C \vee D)) \wedge (F \vee G)' = \dots = (F' \wedge G' \wedge C) \vee (F' \wedge G' \wedge D) \vee (F' \wedge G')$

CNF muoto: $[(A \wedge B) \rightarrow (C \vee D)] \wedge (F \vee G)' = [(A \wedge B)' \vee (C \vee D)] \wedge (F' \wedge G')$
 $= (A' \vee B' \vee C \vee D) \wedge F' \wedge G'$.

10. Osoita, että $\{A \rightarrow B, A' \rightarrow C, C \rightarrow D, B'\} \models D$ käyttämällä ainoana päättelysääntönä Modus Ponensia.

Ratk.	1.	$A \rightarrow B$	Oletus
	2.	$B' \rightarrow A'$	Tautologia $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (B' \rightarrow A')$ ja 1
	3.	B'	Oletus
	4.	A'	MP 2 ja 3
	5.	$A' \rightarrow C$	Oletus
	6.	C	MP 4 ja 5
	7.	$C \rightarrow D$	Oletus
	8.	D	MP 6 ja 7

11. Tutki resoluutiomenettelyllä, onko voimassa $\{A \rightarrow B, C \rightarrow D\} \models (A \vee C) \rightarrow (B \vee D)$. Merkitse tarkasti näkyviin resoluutiomenettelyn eri vaiheet.

Vastaava päättely: $\{A \rightarrow B, C \rightarrow D, [(A \vee C) \rightarrow (B \vee D)]'\} \models 0$.

Konjunktit: $A \rightarrow B = A' \vee B = C_1$

$$C \rightarrow D = C' \vee D = C_2$$

$$[(A \vee C) \rightarrow (B \vee D)]' = [(A \vee C)' \vee (B \vee D)]' = (A \vee C) \wedge (B \vee D)' = (A \vee C) \wedge B' \wedge D'$$

Nyt $A \vee C = C_3$, $B' = C_4$ ja $D' = C_5$.

Vastaava päättely: $\{C_1, C_2, \dots, C_5\} \models 0$

C_1 ja C_3 : $B \vee C = C_6$.

C_6 ja C_4 : $C = C_7$.

C_5 ja C_2 : $C' = C_8$.

C_7 ja C_8 : 0.

Resoluutiomenettely pysähtyy, koska 0 saatiin pääteltyä.

Silloin $\{C_1, C_2, \dots, C_5\} \models 0$, eli myös

$$\{A \rightarrow B, C \rightarrow D, [(A \vee C) \rightarrow (B \vee D)]'\} \models 0$$

ja siis

$$\{A \rightarrow B, C \rightarrow D\} \models (A \vee C) \rightarrow (B \vee D).$$