031023P Tietotekniikan matematiikka

1. välikoe 1.10.2020

1. **a)** Määritellään toimitus | oheisella totuustaululla. Määrää lauseen $A|B$ kanssa yhtäpitävä lause, missä on käytetty vain toimituksia $\vee$ ja $'$. Osoita lauseen $A|B$ ja keksimäsi lauseen yhtäpitävyys totuustaulujen avulla.(3p)

A	B	A | B
T	T	E
T	E	T
E	T	T
E	E	E

b) Tutki resoluutiomenettelyllä, onko voimassa $\{A \to B, C \to D\} \vDash (A \vee C) \to (B \vee D)$. Merkitse tarkasti näkyviin resoluutiomenettelyn eri vaiheet. (3p)

Ratk. Useita oikeita ratkaisuja. Eräs: $A|B = (A \wedge B') \vee (A' \wedge B) = (A' \vee B)' \vee (A \vee B')'$ (2p)

A	B	A'	B'	$A' \vee B$	$L_1 = (A' \vee B)'$	$A \vee B'$	$L_2 = (A \vee B')'$	$L_1 \vee L_2$	$A\|B$
T	T	E	E	T	E	T	E	E	E
T	E	E	T	E	T	T	E	T	T
E	T	T	E	T	E	E	T	T	T
E	E	T	T	T	E	T	E	E	E

(1p)

b) Vastaava päättely: $\{A \to B, C \to D, [(A \vee C) \to (B \vee D)]'\} \vDash 0$ **(1p)**

Konjunktit: $A \to B = A' \vee B = C_1$

$C \to D = C' \vee D = C_2$

$[(A \vee C) \to (B \vee D)]' = [(A \vee C)' \vee (B \vee D)]' = (A \vee C) \wedge (B \vee D)' = (A \vee C) \wedge B' \wedge D'$

Nyt $A \vee C = C_3$, $B' = C_4$ ja $D' = C_5$.

Vastaava päättely: $\{C_1, C_2, \ldots, C_5\} \vDash 0$

C_1 ja C_3: $B \vee C = C_6$.

C_6 ja C_4: $C = C_7$.

C_5 ja C_2: $C' = C_8$.

C_7 ja C_8: 0.

Resoluutiomenettely pysähtyy, koska 0 saatiin pääteltyä.

Silloin $\{C_1, C_2, \ldots, C_5\} \vDash 0$, eli myös

$\{A \to B, C \to D, [(A \vee C) \to (B \vee D)]'\} \vDash 0$

ja siis

$\{A \to B, C \to D\} \vDash (A \vee C) \to (B \vee D)$. **(2p)**

2. **a)** Olkoon perusjoukkona U kaikki maailman ihmiset. Käytetään seuraavia predikaatteja: $M(x)$ = "x käyttää maskia.", $T(x, y)$ = "x haluaa tartuttaa y:n.", $K(x)$ = "x osallistuu kokeeseen.", $E(x)$ = "x pitää koronaetäisyydet.", ja seuraavaa alkiota perusjoukosta V: "Ville Valvoja".

Kirjoita lauseet a1)-a3) merkkimuotoon (1p kukin).

a1) "Kukaan ei halua tartuttaa ketään."

a2) "Ei ole totta, että jokainen maskia käyttävä kokeeseen osallistuja haluaa tartuttaa jonkin kokeeseen osallistujan."

a3) "Jos Ville Valvoja pitää maskia ja pitää koronaetäisyydet, niin kokeessa on ainakin yksi maskia käyttävä koronaetäisyydet pitävä osallistuja, jota hän ei halua tartuttaa."

b) Määrää seuraavien lauseiden totuusarvo: b1) $\forall x \exists y (x^y > 9)$, b2) $\exists x \forall y ((x - y) < 3)$, kun perusjoukko $U = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$. Perustele vastauksesi. (3p)

Ratk. a1) $\forall x \forall y T'(x, y)$ tai $(\exists x \exists y T(x, y))'$

a2) $[\forall x (M(x) \wedge K(x)) \to (\exists y (K(y) \wedge T(x, y)))]'$

a3) $(M(V) \wedge E(V)) \to [\exists x (M(x) \wedge K(x) \wedge E(x) \wedge T'(V, x))]$

b1) $1^y = 1 < 9$ aina kun $y \in U$. Lause on epätosi. (1p)

b2) Nyt $1 - y < 3$ aina kun $y \in U$. Lause on tosi. (2p)

3. **a)** Televisiokatsojien säännöllisiä katsomistottumuksia tarkasteltiin kolmen televisiosarjan perusteella. Sarjat olivat: Taistelee tartunnan kanssa (=TTK), Piilotetut hetket (=SE) ja Divaaniomenat (=SP).

Katsojien joukossa määriteltiin suhde R seuraavasti:

$(x, y) \in R$ täsmälleen silloin kun katsoja x seuraa täsmälleen samoja sarjoja yllä mainituista sarjoista kuin katsoja y.

Tutki onko R ekvivalenssisuhde katsojien joukossa. Jos on, niin todista, että R on ekvivalenssisuhde, ja määrää suhteen R ekvivalenssiluokat. Jos R ei ole ekvivalenssisuhde, niin perustele miksi ei. (3p)

b) Määrittele seuraavat käsitteet ja muodosta jokaisesta käsitteestä esimerkki joka sisältää ainakin 5 pistettä. (1p kukin)

b1) Blokki **b2)** Vieruspistematriisi **b3)** Graafin virittävä puu.

Ratk. a) (i) Selvästi jokainen seuraa itsensä kanssa samoja televisiosarjoja, eli $(x, x) \in R$ kaikilla $x \in U$, eli R on refleksiivinen.

(ii) Jos $(x, y) \in R$, niin x ja y seuraavat samoja televisiosarjoja. Siis myös $(y, x) \in R$, eli R on symmetrinen.

(iii) Jos $(x, y), (y, z) \in R$, niin selvästi x, y, z seuraavat samoja televisisarjoja. Eli $(x, z) \in R$, jolloin R on transitiivinen.

Kohtien (i)-(iii) perusteella R on ekvivalenssirelaatio. **(2p)**

Merkitään TTK, jos televisionkatsoja seuraa sarjaa TTK ja $\overline{TTK}$, jos televisionkatsoja ei seuraa sarjaa TTK. Käytetään samanlaista merkintää myös muille edellä mainituille sarjoille.

Merkitään $E_{X,Y,Z}$, missä $X \in \{TTK, \overline{TTK}\}$, $Y \in \{SE, \overline{SE}\}$ ja $Z \in \{SP, \overline{SP}\}$, ja esimerkiksi $E_{TTK,\overline{SE},SP}$ tarkoittaa niitä televisionkatsojia jotka seuraavat sarjoja TTK ja SP ja eivät seuraa sarjaa SE. Määritellään muut joukot vastaavasti. Silloin suhteen R ekvivalenssiluokat ovat:

$E_{\overline{TTK},\overline{SE},\overline{SP}}$, $E_{TTK,\overline{SE},\overline{SP}}$, $E_{\overline{TTK},SE,\overline{SP}}$, $E_{\overline{TTK},\overline{SE},SP}$, $E_{TTK,SE,\overline{SP}}$, $E_{TTK,\overline{SE},SP}$, $E_{\overline{TTK},SE,SP}$ ja $E_{TTK,SE,SP}$. (1p).

b) Kts. luentokalvot. (1p) kukin.

4. **a)**Hyperkuutio Q_n määritellään rekursiivisesti seuraavasti:

(i) $Q_1 = K_2$ (ii) $Q_n = K_2 \times Q_{n-1}$ aina kun $n = 2, 3, \ldots$.

Graafin avulla voidaan esittää n:n pituiset bittijonot, jos graafin pisteet voidaan nimetä niin, että jokainen n:n pituinen bittijono on täsmälleen yhden pisteen nimi ja kaksi pistettä ovat vieruspisteitä täsmälleen silloin kun pisteiden nimet eroavat täsmälleen yhden bitin verran. **a1)** Esitä 3:n pituiset bittijonot Q_3:sen avulla.(1p)

a2) Osoita matemattisen induktion avulla tulos:

n:n pituiset bittijonot voidaan esittää hyperkuution Q_n avulla aina kun $n = 2, 3, 4, \ldots$.

Merkitse tarkasti näkyviin matemaattisen induktion vaiheet. (3p)

b) Osoita, että jokainen 6 pistettä sisältävä graafi, joka sisältää kaksi viivalla yhdistettyä asteen 2 pistettä joilla ei ole yhteistä vieruspistettä, on tasograafi.

Ratk. a1) Katso luentokalvot. Esimerkki ennen Lausetta 7.5.

a2) Katso luentokalvot. Lauseen 7.5. todistus.

b) Olkoon G 6 pistettä sisältävä graafi, joka sisältää kaksi viivalla yhdistettyä asteen 2 pistettä joilla ei ole yhteistä vieruspistettä.

Jos graafi ei ole tasograafi, niin se sisältää aligraafinaan joko graafin K_5 tai graafin $K_{3,3}$ viivalaajennuksen.

Jos graafi sisältää graafin K_5:n viivalaajennuksen, niin se sisältää vähintään 5 pistettä joiden aste on 4 tai suurempi. Koska G:n kuudesta pisteestä kahden aste on 2, niin G ei sisällä graafin K_5 viivalaajennusta.

Jos graafi sisältää graafin $K_{3,3}$:n viivalaajennuksen, niin se sisältää vähintään 6 pistettä joiden aste on 3 tai suurempi. Koska G:n kuudesta pisteestä kahden aste on 2, niin G ei sisällä myöskään graafin $K_{3,3}$ viivalaajennusta.

Täten G on tasograafi. **(2p)**