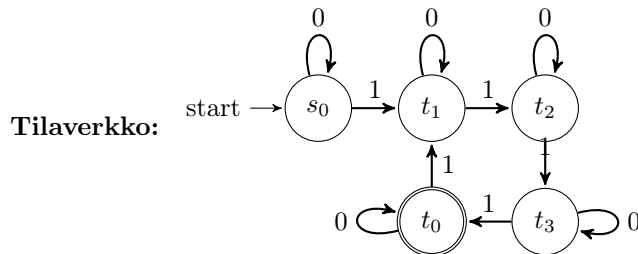


# TIETOTEKNIIKAN MATEMATIIKKA

## Harjoitus 9 syksy 2019. Ratkaisut.

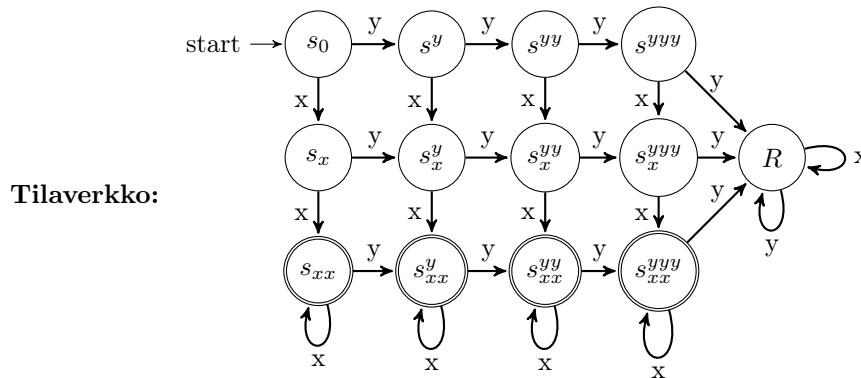
1. Rakenna äärellinen deterministinen automaatti, joka hyväksyy 0,1-jonoista täsmälleen ne, joissa on 1:iä nelosella jaollinen määrä ( $\neq 0$ ) ja hylkää muut.

**Ratk.** Tilalla muistetaan bittien 1 määrän 4:lla jakamisen osamäärä.



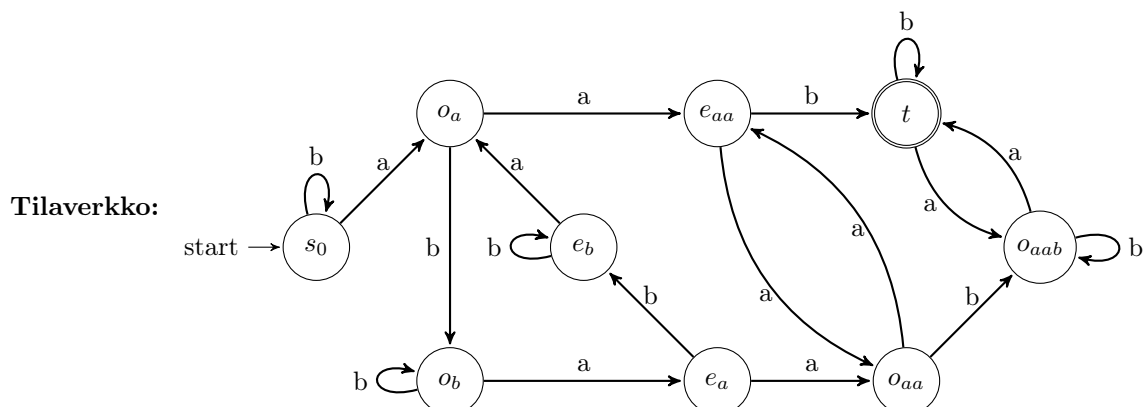
2. Määrää äärellinen deterministinen automaatti, joka hyväksyy kaikki ne aakkoston  $\{x, y\}$  sanat joissa esiintyy ainakin kaksi  $x$  kirjainta ja korkeintaan kolme  $y$  kirjainta, ja hylkää muut sanat. Piirrä automaatin tilaverkko ja selitä syötöt ja tilat.

**Ratk.** Syötöt:  $\{x, y\}$ . Tilalla muistetaan montako merkkiä  $x$  ja montako merkkiä  $y$  on luettu ja onko virhe tapahtunut.



3. Laadi äärellinen deterministinen automaatti (piirtämällä automaatin tilaverkko), joka hyväksyy kaikista aakkoston  $\{a, b\}$  sanoista täsmälleen ne joissa  $a$ :ta on parillinen määrä ja sanassa esiintyy osasanana sana  $aab$  ja hylkää muut.

**Ratk.** Muistetaan tiloilla onko kirjainta  $a$  tehty parillinen ( $e$  "even") vai pariton määrä ( $o$  "odd") ja missä kohtaa viimeisillä merkeillä ollaan lukemassa sanaa  $aab$ . Esimerkiksi automaatti on tilassa  $e_{aa}$  kun kirjainta  $a$  on luettu parillinen määrä ja viimeisinä merkkeinä on luettu  $aa$ . Vastaavasti automaatti on tilassa  $o_a$ , kun kirjainta  $a$  on luettu pariton määrä, viimein luettu merkki oli  $a$  ja sitä edellinen ei ollut  $a$ . Automaatti on tilassa  $o_{aab}$  kun osana  $aab$  on luettu ja kirjainta  $a$  on luettu pariton määrä. Tila  $s_0$  on alkutila ja tilassa  $t$  automaatti on kun siihen mennessä luetussa sanassa molemmat ehdot on täytetty.



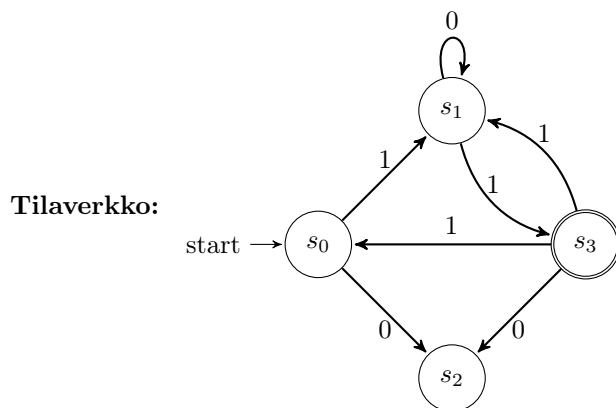
4. Tutkitaan alla olevalla taulukolla esitettyä äärellistä automaattia, missä alkutila on  $s_0$  ja lopputilojen joukko  $\{s_3\}$ . Määrää kieli/sanat, jotka automaatti hyväksyy. Laadi äärellinen deterministinen automaatti, joka hyväksyy täsmälleen saman kielen kuin kuvion äärellinen epä-deterministinen automaatti määräämällä laskien deterministisen automaatin tilat ja lopulliset tilat (hyväksymistilat) ja

piirtämällä deterministisen automaatin tilaverkko, missä näkyy mistä epädeterministisen automaatin tiloista deterministisen automaatin tilat koostuvat.

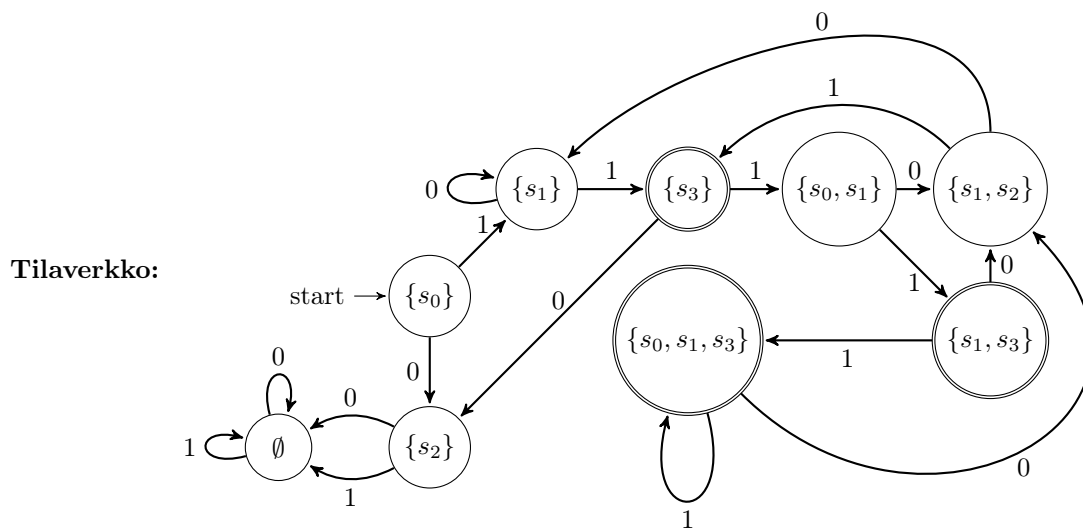
|       | 0     | 1          |
|-------|-------|------------|
| $s_0$ | $s_2$ | $s_1$      |
| $s_1$ | $s_1$ | $s_3$      |
| $s_2$ | —     | —          |
| $s_3$ | $s_2$ | $s_0, s_1$ |

Ratk.

Epädeterministinen automaatti:



Deterministinen automaatti:

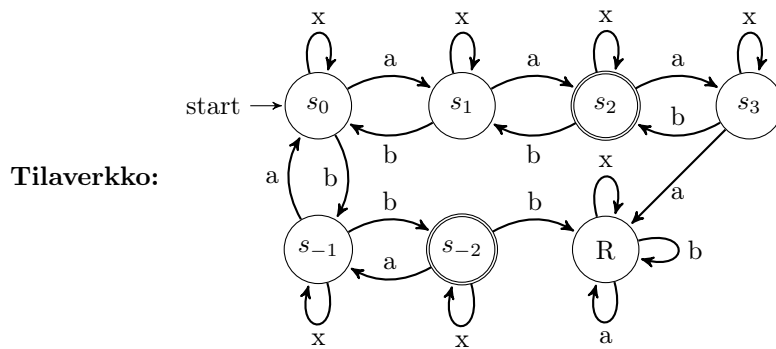


Automaattien hyväksymä kieli: Epädeterministisestä automaatista nähdään, että jokainen hyväksytty sana sisältää vähintään kaksi 1:stä. Vähiten 1:stä sisältävät hyväksytyt sanat ovat muotoa  $10^*1$ . Jokainen hyväksytty sana alkaa tätä muotoa olevalla sanalla. Hyväksytyt sanat voivat jatkua mielivaltaisella määrällä muotoa  $110^*1$  tai muotoa  $10^*1$  olevilla sanoilla. Muun muotoisia sanoja automaatti ei hyväksy. Automaatin hyväksymä kieli on siis muotoa  $10^*1(110^*1 + 10^*1)^*$ .

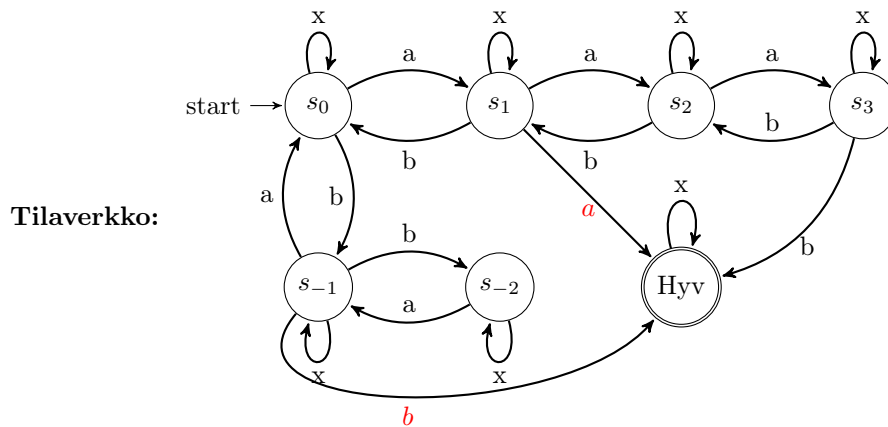
- Tutkitaan kirjaimista  $a, b$  ja  $x$  koostuvia sanoja (vasemmalta oikealle). Sana  $w'$  on sanan  $w$  alkuosa, jos  $w = w'w''$  jollakin sanalla  $w''$ . Esimerkiksi  $\lambda, b, bx, bxb$  ovat sanan  $bxb$  alkuosat. Olkoon sanassa  $w$  esiintyvien  $a$  kirjainten lukumäärä  $|w|_a$  ja  $b$  kirjainten lukumäärä  $|w|_b$ .

  - Rakenna sellainen äärellinen deterministinen automaatti, joka lukee kirjaimista  $a, b$  ja  $x$  koostuvia sanoja ja hyväksyy niistä sellaiset sanat  $w$  joille on voimassa molemmat seuraavista ehdoista: (i) jos  $w'$  on  $w$ :n alkuosa, niin  $-2 \leq |w'|_a - |w'|_b \leq 3$  (ii)  $|w|_a - |w|_b = \pm 2$ , ja hylkää muut
  - Rakenna epädeterministinen automaatti, joka tunnistaa täsmälleen samat sanat kuin kohdan a) deterministinen automaatti, ja jolla on ainoastaan yksi hyväksyvä tila.

**Ratk. a)** Tiloilla muistetaan siihen mennessä luetulle sanalle  $w'$  luku  $|w'|_a - |w'|_b$ .

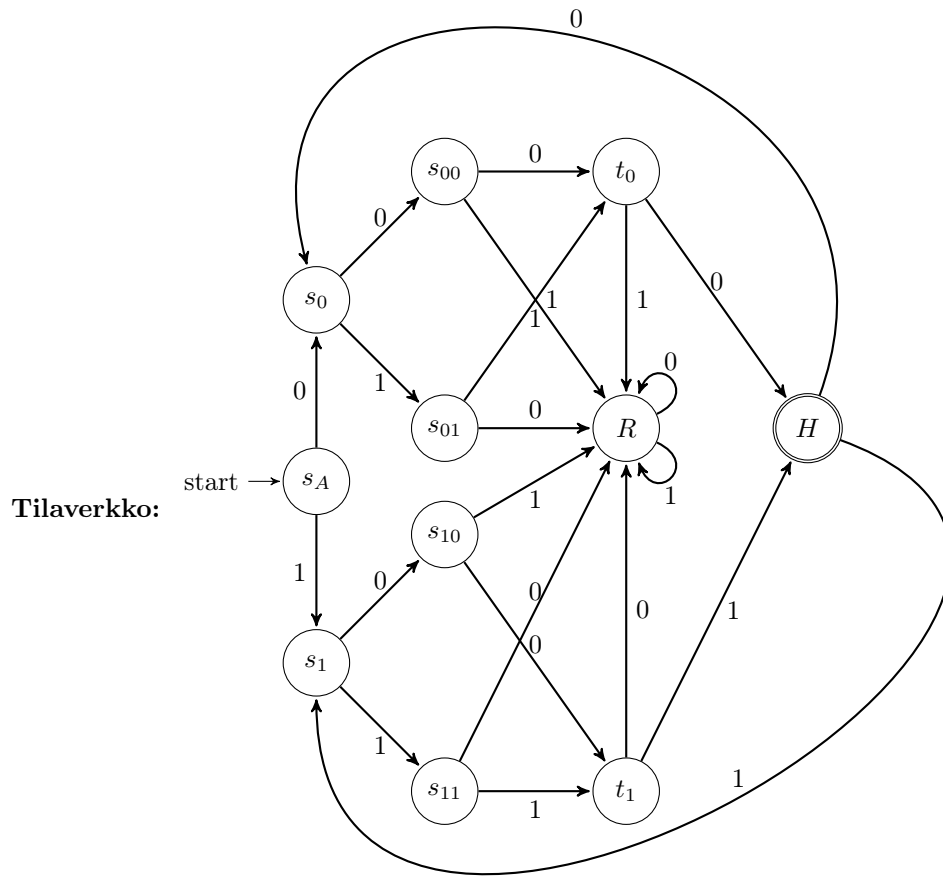


**b)** Ei tarvita hylkäävää tilaa. Kun luettu syöttö on sitä muotoa, ettei enää voi saada hyväksyttävää syöttöä, niin automaatti ei voi enää jatkaa lukemista.



6. 0:ista ja 1:istä koostuva merkkijono on palindromi, jos jono on sama luettaessa vasemmalta oikealle kuin oikealta vasemmalle (esimerkiksi jono 00100100 on palindromi). Luettele kaikki 4:stä merkistä koostuvat 0,1-palindromit (1p). Olkoon  $w = w_1w_2w_3 \cdots w_n$ ,  $n \geq 1$ , missä jokainen  $w_i (i = 1, \dots, n)$  on 4:stä merkistä koostuva (vain 0:ia ja 1:siä käsittävä) palindromi (l.  $w$  saadaan asettamalla mielivaltainen määrä (kuitenkin ainakin yksi) 4:n merkin palindromeja peräkkäin). Rakenna deterministinen äärellinen automaatti, joka hyväksyy 0,1-jonoista täsmälleen jonot  $w$ , jotka on kuvattu yllä. Voidaanko rakentaa äärellinen deterministinen automaatti joka hyväksyy täsmälleen kaikki aakkoston  $\{0, 1\}$  palindromit? Jos voidaan, rakenna automaatti. Jos ei voida, selitä miksi ei.

**Ratk.** Aakkoston  $\{0, 1\}$  4:n pituiset palindromit ovat 1111, 0000, 1001, 0110. Tiloilla muistetaan mikä osa palindromeista on tehty (tilat  $s_0, s_{00}, s_{01}, s_{10}, s_{11}$ ), mikä bitti on palindromeista vielä tehtävä (tilat  $t_0$  ja  $t_1$ ) ja onko tapahtunut virhe (tila  $R$ ).



**Väite:** Kaikki aakkoston  $\{0, 1\}$  palindromit (ja vain ne) hyväksyvää automaattia ei voida rakentaa.

**Todistus.** Tehdään **Vastaoletus:** Automaatti voidaan rakentaa ja se sisältää  $k$  tilaa.

Tarkastellaan sanaa  $0^k 1^k 1^k 0^k$ . Sana on palindromi, joten automaatti hyväksyy sanan.

Koska automaatissa on  $k$  tilaa, niin luettaessa sanan alkuosaa  $0^k$  jokin tila esiintyy kaksi kertaa.

Oletetaan että näin tapahtuu kun sana  $0^i$  ja sana  $0^j$  on luettu, missä  $j > i$ . Silloin automaatti tunnistaa myös sanan  $0^i 0^{k-j} 1^k 1^k 0^k$ , eli sanan  $0^l 1^k 1^k 0^k$ , missä  $l < k$ . Tämä sana ei ole palindromi, joten Vastaoletus on väärä, eli Väite on voimassa.