

TIETOTEKNIIKAN MATEMATIIKKA

Harjoitus 8 syksy 2019. Ratkaisut

1. Tutkitaan oheista kielioppia. Minkä kielen tuottaa kielioppi $G = (\{S, A, a, b, c\}, \{a, b, c\}, S, \{S \rightarrow aA, A \rightarrow bAa, A \rightarrow c\})$?

Ratk. Jokainen kieliopin johto on muotoa:

$$S \Rightarrow aA \Rightarrow abAa \Rightarrow abbAaa \Rightarrow \dots \Rightarrow ab^n Aa^n \Rightarrow ab^n ca^n, \text{ missä } n = 0, 1, \dots$$

Siis $L(G) = \{ab^n ca^n | n = 0, 1, \dots\} = \{ac, abca, ab^2ca^2, \dots\}$.

2. Määrittää kieliopit seuraaville aakkoston $\{a, b\}$ kielille.
- a) Sanat, jotka alkavat kirjaimella a ja loppuvat sanaan ba .
- b) Sanat, joissa esiintyy osasanana sana $babb$.

Ratk.

a) $P_a = \{S \rightarrow aXba, X \rightarrow aX, X \rightarrow bX, X \rightarrow \lambda\}$

$$G_a = (\{S, X, a, b\}, \{a, b\}, S, P_a)$$

b) $P_b = \{S \rightarrow aS, S \rightarrow bS, S \rightarrow babbX, X \rightarrow aX, X \rightarrow bX, X \rightarrow \lambda\}$

$$G_b = (\{S, X, a, b\}, \{a, b\}, S, P_b)$$

3. Tutkitaan oheista (Backus-Naur-muotoista) kielioppia. Kirjoita kieli, jonka kielioppi määrittää.

$$\langle S \rangle ::= \langle A \rangle c \langle A \rangle \langle B \rangle$$

$$\langle A \rangle ::= a \langle A \rangle | \lambda$$

$$\langle B \rangle ::= b \langle B \rangle | b$$

Ratk.

$$\langle S \rangle \Rightarrow \langle A \rangle c \langle A \rangle \langle B \rangle \stackrel{*}{\Rightarrow} a^n \langle A \rangle c \langle A \rangle \langle B \rangle \Rightarrow a^n c \langle A \rangle \langle B \rangle \stackrel{*}{\Rightarrow} a^n ca^m \langle A \rangle \langle B \rangle$$

$$\Rightarrow a^n ca^m \langle B \rangle \stackrel{*}{\Rightarrow} a^n ca^m b^p \langle B \rangle \Rightarrow a^n ca^m b^{p+1}$$

aina kun $n, m, p \geq 0$.

Ei muita johtoja.

$$\text{Kieli: } \{a^n ca^m b^{p+1} | n = 0, 1, \dots, m = 0, 1, \dots, p = 0, 1, \dots\}$$

4. Laadi Backus-Naur muotoinen kielioppi, joka tuottaa merkki merkiltä vasemmalta oikealle täsmälleen kaikki sellaiset nolista ja ykkösistä koostuvat sanat (=bittijonot) joissa esiintyy merkkiyhdistelmä 101 ainakin kerran.

Ratk. Apukirjaimen nimessä muistetaan missä kohtaa ollaan tekemässä sanaa 101 ja onko 101 jo tehty.

$$\langle S \rangle ::= 0 \langle S \rangle | 1 \langle 1 \rangle$$

$$\langle 1 \rangle ::= 0 \langle 10 \rangle | 1 \langle 1 \rangle$$

$$\langle 10 \rangle ::= 1 \langle \text{Tehty} \rangle | 0 \langle S \rangle$$

$$\langle \text{Tehty} \rangle ::= 0 \langle \text{Tehty} \rangle | 1 \langle \text{Tehty} \rangle | \lambda$$

Esimerkiksi sanan 010101 johto:

$$\langle S \rangle \Rightarrow 0 \langle S \rangle \Rightarrow 01 \langle 1 \rangle \Rightarrow 010 \langle 10 \rangle \Rightarrow 0101 \langle \text{Tehty} \rangle \Rightarrow 01010 \langle \text{Tehty} \rangle \Rightarrow 010101 \langle \text{Tehty} \rangle \Rightarrow 010101.$$

5. Laadi Backus-Naur muotoinen kielioppi, joka tuottaa täsmälleen kaikki aakkoston $\{0, 1\}$ sanat, joissa esiintyy korkeintaan kolme 1:stä peräkkäin. Kuuluuko tyhjä sana kieleen?

Ratk. Apukirjaimessa muistetaan montako 1:stä on tehty peräkkäin.

$$\langle S \rangle ::= 0 \langle S \rangle | 1 \langle 1 \rangle | \lambda$$

$$\langle 1 \rangle ::= 0 \langle S \rangle | 1 \langle 11 \rangle | \lambda$$

$$\langle 11 \rangle ::= 0 \langle S \rangle | 1 \langle 111 \rangle | \lambda$$

$$\langle 111 \rangle ::= 0 \langle S \rangle | \lambda$$

6. Tiedonsiirrossa siirrettiin numeromerkeistä (tässä vain merkit 1, 2, 3) koostettuja numerojonoja, joissa oli aina parillinen määrä numeromerkkejä. Virheiden havaitsemiseksi aina kahden merkin perään lisättiin merkki, joka oli kahden edellisen summa. Kirjoita lisämerkeillä täydennetty numerojono seuraavalle siirrettäväksi tarkoitetulle numerojonolle 12231132. Tee Backus-Naur-tyyppinen kielioppi, joka tuottaa merkki merkiltä vasemmalta oikealle täsmälleen kaikki tällaiset tarkistusmerkeillä varustetut vähintään kolme merkkiä sisältävät numerojonot. Vastaanottopäässä saatiin siirron tuloksena seuraava numerojono 134112112325123225. Oliko jonon siirrossa tapahtunut virhe vai ei?

Ratk. Lisämerkeillä täydennetty numerojono **123235112325**.

Apukirjaimessa muistetaan kuinka monta lukua viimeisen tarkistusmerkin jälkeen on luettu ja mikä on näiden lukujen summa. Esimerkiksi apukirjaimessa $\langle L2S5 \rangle$ muistetaan, että on luettu 2 lukua, joiden summa on 5

$$\langle S \rangle ::= 1\langle L1S1 \rangle | 2\langle L1S2 \rangle | 3\langle L1S3 \rangle$$

$$\langle L1S1 \rangle ::= 1\langle L2S2 \rangle | 2\langle L2S3 \rangle | 3\langle L2S4 \rangle$$

$$\langle L1S2 \rangle ::= 1\langle L2S3 \rangle | 2\langle L2S4 \rangle | 3\langle L2S5 \rangle$$

$$\langle L1S3 \rangle ::= 1\langle L2S4 \rangle | 2\langle L2S5 \rangle | 3\langle L2S6 \rangle$$

$$\langle L2S2 \rangle ::= 2\langle S \rangle | 2$$

$$\langle L2S3 \rangle ::= 3\langle S \rangle | 3$$

$$\langle L2S4 \rangle ::= 4\langle S \rangle | 4$$

$$\langle L2S5 \rangle ::= 4\langle S \rangle | 5$$

$$\langle L2S6 \rangle ::= 6\langle S \rangle | 6$$

Jonossa 134112112325123225 viimeinen merkki ei ole kahden edellisen summa.

Siirrossa on tapahtunut virhe.

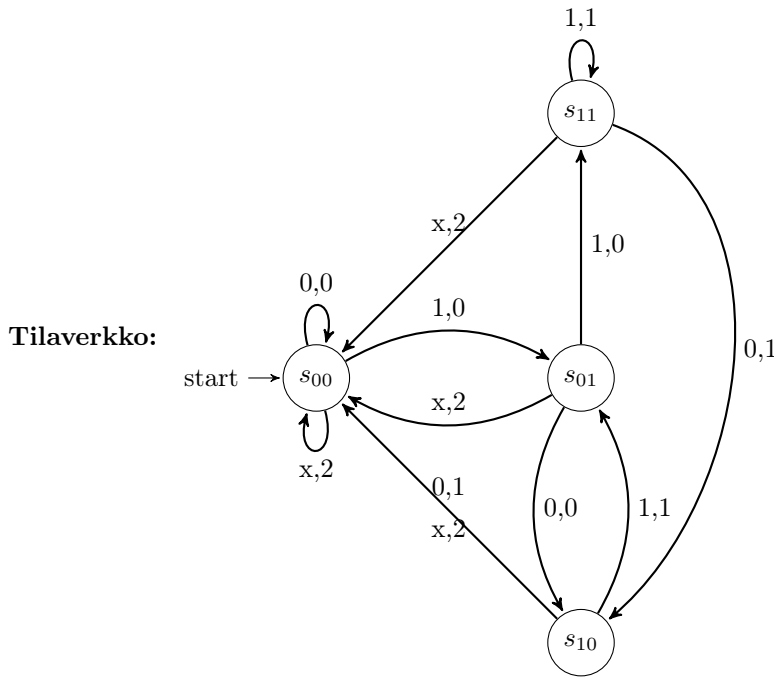
7. Tarkastellaan kahdella askeleella syöttöjonoa viivästyttävää jonokonetta. Jonokoneen syöttöjonot koostuvat nolista ja ykkösistä sekä symbolista x . Syötössä esiintyvää 0,1 jonoa viiväستetään kahdella askeleella tulostamalla aluksi symbolijono 00 ja senjälkeen syötön 0,1 jono alusta alkaen lukuunottamatta kahta viimeistä merkkiä. Syöttösymboli x ilmoittaa 0,1 jonon loppumisen, jolloin jonokone tulostaa symbolin 2 ja palaa uuden jonon käsittelyvalmiuteen. Esimerkiksi syötettäessä jono **01100110x** saadaan tulostuksena **000110012**. Laadi jonokoneen tilaverkko. Selitä koneen tilat sekä syöttö- ja tulostussymbolit.

Ratk. Tila muistaa kaksi seuraavaksi tulostettavaa bittiä.

Tilat: $S = \{s_{00}, s_{01}, s_{10}, s_{11}\}$. Esimerkiksi tilassa s_{01} tiedetään, että seuraavaksi on tulostettava 01.

Syöttöaakkosto: $\{0, 1, x\}$

Tulostusaakkosto: $\{0, 1, 2\}$

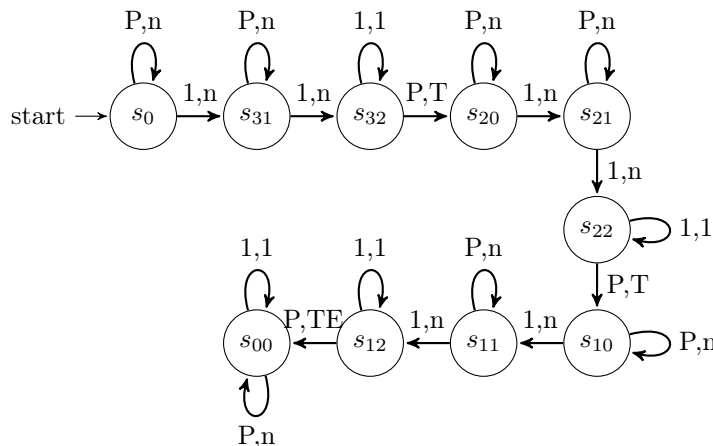


8. Myyntiautomaattiin ladattiin kolme kappaletta (samaa) tuotetta (=T). Tuotteen hinta on 2 euroa ja automaatin raha-aukkoon sopivat vain 1 euron kolikot (tehtävän ulkopuolelle jätetään rahojen oikeellisuuden testaus). Kun tuotteen hinta on tullut syötetyksi, niin automaatti palauttaa syötetyt ylimääräiset kolikot ja painamalla palvelunappia (=P) automaatti luovuttaa maksetun tuotteen. Kun viimeinen automaatin sisältämä tuote luovutetaan, niin samanaikaisesti liukuu estelevy (=E) raha-aukon eteen. Laadi automaatin toimintaa kuvaava jonokoneen tilaverkko. Selitä koneen tilat sekä syöttö- ja tulostussymbolit.

Ratk. Tiloilla muistetaan syötetty rahamäärä ja jäljelläolevien tuotteiden määrä. Esimerkiksi tila s_{32} tarkoittaa, että tuotteita on jäljellä 3 ja on syötetty rahamäärä 2 euroa.

Syöttöaakkosto: $\{1, P\}$

Tulostusaakkosto: $\{T, 1, n, TE\}$, missä T = tuote, 1 = euron kolikko, n = ei mitään ja TE = tuote ja estelevy.



9. Eräissä ohjelmointikielissä desimaaliluku N on esitettävä muodossa mn^* , $mn^*.n^*$, n^* tai $n^*.n^*$, missä m on etumerkki ($m \in \{+, -\}$) n on numero ($n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$) ja n^* on mielivaltaisen pituinen jono numeroita. Jonon pituus voi olla myös 0 (tyhjä jono). Esimerkiksi $+2.74$, $-.58$, 129 , $+$ ovat oikein esitettyjä desimaalilukuja. Määrää sellaisen jonokoneen tilaverkko, joka tarkistaa, onko syöttönä oikein esitetty desimaaliluku tulostamalla jokaisen luetun syöttömerkin jälkeen luvun 1, jos tähän mennessä luettu osa syöttöä on oikein esitetty desimaaliluku ja luvun 0 muutoin. Luvun syötön aloitus ja lopetus tapahtuvat painamalla välilyöntinäppäintä (jolloin output on tyhjä = ei mitään = e). Mitkä ovat koneen syötöt, tulostukset ja mistä koneen tilat koostuvat? HUOM! Merkin-

nät yksinkertaistuvat, jos käytät syöttömerkkiä n kuvaamaan mitä tahansa numeroista $0, 1, \dots, 9$. Amerikkalaisen käytännön mukaisesti tässä desimaalipilkun paikalla on piste.

Ratk. Tiloilla muistetaan, onko syöttö mennessä oikea ja missä kohtaa syöttöä ollaan.

Syöttöaakkosto: $\{+, -, \bullet, 0, 1, \dots, 9, \square\}$, missä \square = välilyönti.

Lyhennysmerkintänä m tarkoittaa etumerkkiä, eli $m \in \{+, -\}$ ja n mitä tahansa numeroa $0, 1, 2, \dots, 9$.

Tulostusakkosto: $\{0, 1, e\}$, missä e = "Ei mitään".

Tilat: $\{S_a, S1, M, Piste, R\}$, missä S_a on alkutila, R on virhetila, tilassa $S1$ on syötetty pariton määrä välilyönnejä, tilassa M 1. syötetty merkki välilyönnin jälkeen on joko etumerkki tai numero ja tilassa $Piste$ on piste syötetty .

