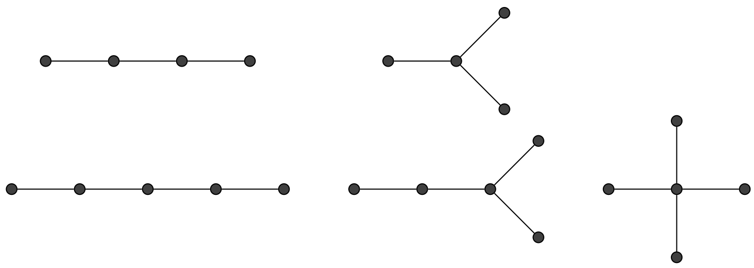
TIETOTEKNIIKAN MATEMATIIKKA

Harjoitus 7 syksy 2019. Ratkaisut

1. Piirrä kaikki ei-isomorfiset 4 tai 5 pistettä sisältävät puut.

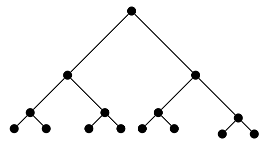
   Ratk.



2. Juurrettu puu on binääripuu, jos jokaisella pisteellä on korkeintaan 2 lasta. Montako pistettä enintään on k:n korkuisella binääripuulla. Montako lehteä?

   Ratk. a)

   Eniten lehtiä sisältävä binääripuuu, jonka korkeus on 3:



   Lehtiä enintään $8 = 2^3$. Pisteitä yhteensä $1+2+4+8 = 2^0+2^1+2^2+2^3 = 15 = 2^{3+1}-1$.

   Vastaavasti, jos binääripuun korkeus on k, niin maksimissaaan lehtiä on 2^k kpl.

   Pisteitä enimmillään $1+2^1+2^2+\cdots+2^k \overset{\text{geometrinen summa}}{=} \frac{1(1-2^{k+1})}{1-2} = 2^{k+1}-1$ kappaletta.

3. Tietokoneverkko voidaan esittää graafina, missä pisteet kuvaavat tietokoneita ja viivat kuvaavat suoria yhteyksiä. Jokaisella tietokoneella v on osoite eli bittijono $\alpha(v)$. Osoitteen pituus on bittien lukumäärä osoitteessa. Viestiä, joka on tarkoitettu tietokoneelle v, edeltää aina v:n osoite. Kahden samanpituisen osoitteen Hamming-etäisyys $h(\alpha(u), \alpha(v))$ on niiden osoitteen bittien lukumäärä, joissa kyseiset osoitteet eroavat. Esimerkiksi $h(00100, 11101) = 3$.

   Graafi on osoitettavissa oleva(addressable), jos sen pisteille voidaan muodostaa sellainen osoitteisto, missä

$$d_G(u,v) = h(\alpha(u), \alpha(v)).$$

   Osoita, että jokainen puu $T = (V,E)$ on osoitettavissa oleva ja puun pisteiden osoitteiden pituudeksi voidaan valita $|V|$-1.

   Ratk. Väite: Jokainen puu $T = (V,E)$ on osoitettavissa oleva ja osoitteen pituudeksi voidaan valita $|V|-1$.

   Tod. Matemaattinen induktio puun pisteiden lukumäärän suhteen.

   Tapaus $|V| = 2$.

   Ainoa puu:  Osoitteet 0 ja 1.

   Induktio-oletus: Aina kun $V \leq k$, niin Väite on voimassa.

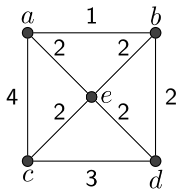
   Tapaus $|V| = k+1$. Olkoon $V = \{v_1, v_2, \ldots v_k, v_{k+1}\}$. Olkoon v_i eräs T:n lehti ja v_iv_j T:n ainoa viiva jossa v_i on päätepisteenä . Poistetaan T:stä piste v_i ja viiva v_iv_j. Saadaan puu $T - v_i$, jossa on k pistettä. Induktio-oletuksen perusteella tämä puu on osoitettavissa oleva ja osoitteen pituus on $k-1$. Olkoon tämä osoite α_l aina kun $l = 1,2,\ldots,k+1$ ja $l \neq i$.

   Määritellään osoite puussa T niin, että pisteen v_l osoite on $0\alpha_l$ aina kun $l = 1,2,\ldots,k+1$ ja $l \neq i$, eli lisätään osoitteen eteen 0. Pisteen v_i osoitteeksi määritellään $1\alpha_j$. Silloin on saatu T:n pisteiden haluttu osoitteisto, jonka pituus on k.

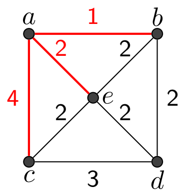
   Väite seuraa induktioperiaatteesta.

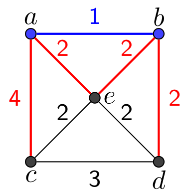
4. Kaukolämpöverkoston runkoputkiston rakentamiskustannukset (miljoonina euroina) 5:n kaupunginosan $\{a,b,c,d,e\}$ välillä arvioitiin seuraavasti: $ab = 1, ae = 2, ac = 4, bd = 2, be = 2, cd = 3, ce = 2, de = 2$. Runkoputkisto alkoi kaupunginosasta a. On selvitettävä miten runkoputkisto voidaan vetää kaikkein edullisimmin jokaiseen kaupunginosaan. Mihin graafiteorian ongelmaan yllä kuvattu ongelma palautuu? Etsi ratkaisu ongelmaan. Onko ratkaisu yksikäsitteinen?

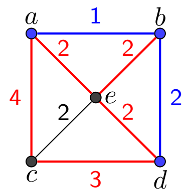
   Ratk. Esitetään kustannukset painotettuna graafina.

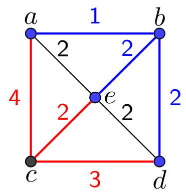
G: 

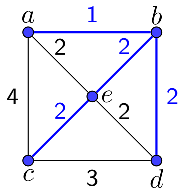
Graafiteoreettiseti kyseessä on graafin G keveimmän viritetyn puun etsiminen. Tehdään se Primin algoritmilla. Seuraavassa punaiset viivat ovat ehdokkaita ja siniset viivat ja pisteet jo valittuja.

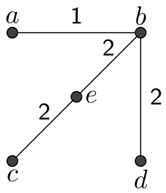
1: 

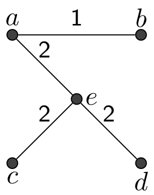
2: 

3: 

4: 

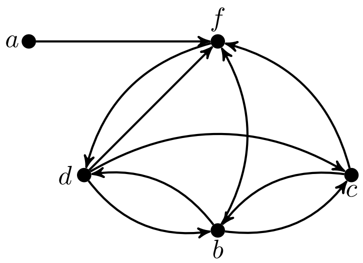
5: 

Eräs kevein virittävä puu: 

Ratkaisu ei ole yksikäsitteinen. Toinen ratkaisu: 

5. Onko graafi $D = (V_D, E_D)$, missä $V_D = \{a, b, c, d, f\}$ ja $E_D = \{af, bc, bd, bf, cb, cf, db, dc, df, fd\}$, yhtenäinen, unilateraalinen tai vahvasti yhtenäinen. Määrää D:n pisteiden tulo- ja lähtöasteet.

Ratk.

D: 

Tulo- ja lähtöasteet:

	deg_D^I	deg_D^O
a	0	1
b	2	3
c	2	2
d	2	3
f	4	1

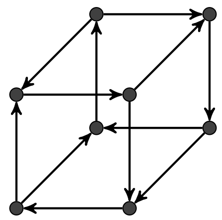
Selvästi D on yhtenäinen.

D ei sisällä suunnattua polkua $f \xrightarrow{*} a$, joten D ei ole vahvasti yhtenäinen.

D sisältää joko suunnatun polun $x \xrightarrow{*} y$ tai suunnatun polun $y \xrightarrow{*} x$ aina kun $x, y \in V_D$, joten D on unilateraalinen.

6. Määrää hyperkuution Q_3 vahvasti yhtenäinen orientaatio.

Ratk.



7. Suunnattu graafi on asyklinen, jos se ei sisällä suunnattua piiriä. Osoita, että asyklinen suunnattu graafi sisältää pisteen, jonka tuloaste on 0.

   Ratk. Oletus: $D = (V_D, E_D)$ on asyklinen suunnattu graafi.

   Väite: $deg_D^I(v) = 0$ jollakin pisteellä $v \in V_D$.

   Tod. Olkoot $P : v \xrightarrow{*} u$ D:n pisin suunnattu polku.

   Vastaoletus: $deg_D^I(v) > 0$

   Vastaoletuksen perusteella on olemassa D:n suunnattu viiva xv jollakin pisteellä $x \in V_D$, $x \neq v$.

   Jos x ei esiinny suunnatussa polussa P, niin polku $(xv)P$ eli polku $x \to v \xrightarrow{*} u$ on pidempi kuin P.

   Tämä on ristiriita, koska P oli pisin.

   Jos piste x esiintyy polussa P, niin D sisältää suunnatun piirin $x \to v \xrightarrow{*} x$.

   Tämä on ristiriita, koska D oli asyklinen.

   Siis Vastaoletus on epätosi ja Väite on voimassa.

8. Olkoon aakkosto $V = \{0, 1\}$. Mitkä seuraavista kielistä sisältävät sanan 01110?

   a) $\{0,1\}^*$ **b)**$\{01\}\{1\}^*\{10\}$ **c)** $\{000\}^*\{1\}^*\{0\}^+\{11\}^*\{0\}^*$ **d)** $\{00\}^*\{10\}^*$ **e)** $\{\{0\}^*\{1\}^*\{0\}^*\}^+$.

   Ratk. a) $\{0,1\}^*$ sisältää kaikki bittijonot. Siis $01110 \in \{0,1\}^*$

   b) $01110 = 011^110 \in \{01\}\{1\}^*\{10\}$

   c) Kielen $\{000\}^*\{1\}^*\{0\}^+\{11\}^*\{0\}^*$ sanoissa on pariton määrä 1:iä peräkkäin vain kun sana alkaa 000:lla tai 1:llä. Siis $01110 \notin \{000\}^*\{1\}^*\{0\}^+\{11\}^*\{0\}^*$.

   d) 11 ei ole osasanana kielen $\{00\}^*\{10\}^*$ sanoissa. Siis $01110 \notin \{00\}^*\{10\}^*$.

   e) $01110 = 01^30 \in \{0\}^*\{1\}^*\{0\}^*$. Siis $01110 \in \{\{0\}^*\{1\}^*\{0\}^*\}^+$

9. Määrää säännölliset ilmaisut seuraaville aakkoston $\{a, b\}$ kielille. Muunna saamasi säännöllinen ilmaisu R sen määräämäksi säännölliseksi kieleksi $L(R)$.

   a) Sanat, jotka alkavat kirjaimella a ja loppuvat kirjaimeen b.

   b) Sanat, joiden pituus on jaollinen 3:lla.

   c) Sanat, joissa esiintyy ainakin 2 kirjainta b.

   d) Sanat, joissa esiintyy pariton määrä kirjainta a.

   Ratk. a) $a(a+b)^*b$ $\quad\{a\}\{a,b\}^*\{b\}$

   b) $(aaa + aab + aba + baa + abb + bab + bba + bbb)^*$ $\quad\{aaa, aab, aba, baa, abb, bab, bba, bbb\}^*$.

   Toinen ratkaisu $((a+b)(a+b)(a+b))^*$.

   c) $(a+b)^*b(a+b)^*b(a+b)^*$ $\quad\{a,b\}^*\{b\}\{a,b\}^*\{b\}\{a,b\}^*$.

   d)$b^*ab^*(b^*ab^*ab^*)^*$ $\quad\{b\}^*\{a\}\{b\}^*\{\{b\}^*\{a\}\{b\}^*\{a\}\{b\}^*\}^*$

10. a) Kuuluuko tyhjä sana λ säännöllisen ilmaisun $(a+b)^*ab + (abc)^*$ määrittelemään kieleen? Perustele vastauksesi!

    b) Määrää säännöllinen ilmaisu kielelle joka sisältää täsmälleen kaikki ne aakkoston $\{0,1\}$ sanat, jotka sisältävät osasananaan yhden tai useamman sanoista 000, 111 ja 1001.

    Ratk. a) Tyhjä sana $\lambda \in (abc)^*$, joten λ kuuluu ilmaisun $(a+b)^*ab+(abc)^*$ määrittelevään kieleen.

    b) Eräs ratkaisu: $(0+1)^*(000+111+1001)(0+1)^*$