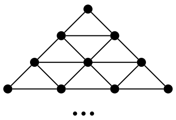
TIETOTEKNIIKAN MATEMATIIKKA

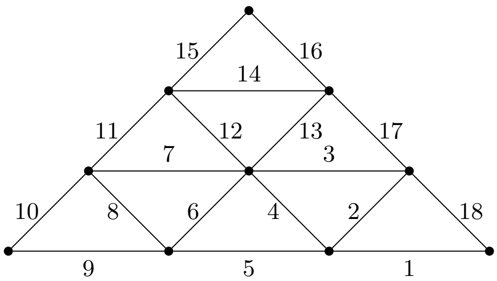
Harjoitus 6 syksy 2019. Ratkaisut

1. Tarkastellaan alla olevaa graafia. Se sisältää alla kuvatun kaltaisia tasoja n kappaletta. Onko graafi Eulerin graafi? Jos on, niin kuvaa Eulerin kierros ja jos ei niin perustele miksi ei.



Ratk. Jokaisen pisteen aste on parillinen, joten graafi on Eulerin graafi.

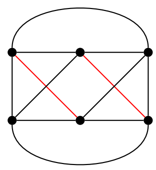
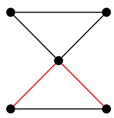
Eulerin kierros saadaan, kun käydään alla olevassa graafissa viivat numerojärjestyksessä.



Vastaava menettely toimii kun tasoja on n kpl.

2. a) Piirrä vähintään 6 pistettä sisältävä Eulerin graafi, joka ei ole piiri.

   b) Piirrä Eulerin graafi, jossa kahdella viivalla on yhteinen vieruspiste, mutta nämä kaksi viivaa eivät ole peräkkäin yhdessäkään graafin Eulerin kierroksessa.

Ratk. a)  **b)** 

3. a) Osoita tulos: Jos graafi G on jäljitettävissä oleva, niin graafi $K_2 \times G$ on Hamiltonin graafi.

   b) Osoita, että Q_n on Hamiltonin graafi aina kun $n = 2, 3, 4 \ldots$..

Ratk.

a) Oletus: G on jäljitettävissä oleva, eli G sisältää Hamiltonin polun.

Väite: $K_2 \times G$ on Hamiltonin graafi.

Tod. Graafi $K_2 \times G$ koostuu kahdesta graafin G kopiosta G ja G', missä vastinpisteet on liitetty viivalla toisiinsa.

Olkoot $P : x \xrightarrow{*} y$ ja $P' : x' \xrightarrow{*} y'$ Hamiltonin polut G:ssä ja G':ssa. Polut identtiset.

Silloin piiri $(xx')P'(y'y)P^{-1}$ on Hamiltonin piiri $x \to x' \xrightarrow{*} y' \to y \xrightarrow{*} x$ $K_2 \times G$:ssä ja Väite on voimassa.

b) Väite: Hyperkuutio Q_n on Hamiltonin graafi aina kun $n = 2, 3, \ldots$.

Tod. Graafi Q_2 on piirinä Hamiltonin graafi, eli myös jäljitettävissä oleva.

a) kohdan perusteella $Q_3 = K_2 \times Q_2$ on Hamiltonin graafi, eli myös jäljitettävissä oleva.

a) kohdan perusteella $Q_4 = K_2 \times Q_3$ on Hamiltonin graafi, eli myös jäljitettävissä oleva.

jne. Siis Q_n on Hamiltonin graafi.

4. Osoita, että graafi $K_n + \overline{K_{n+1}}$ ei ole Hamiltonin graafi millään $n = 1, 2, \ldots$.

Ratk. Olkoot $K_n = (V_{K_n}, E_{K_n})$, $K_{n+1} = (V_{K_{n+1}}, E_{K_{n+1}})$, missä graafit K_n ja K_{n+1} ovat erilliset. Olkoot $G = K_n + \overline{K_{n+1}}$. Nyt G sisältää kaikki graafien K_n ja K_{n+1} pisteet, sekä kaikki graafin K_n viivat, sekä kaikki viivat uv, missä u on graafin K_n piste ja v on graafin K_{n+1} piste. Toisin sanoen $V_G = V_{K_n} \cup V_{K_{n+1}}$ ja $E_G = E_{K_n} \cup \{uv | u \in V_{K_n} \text{ ja } v \in V_{K_{n+1}}\}$.

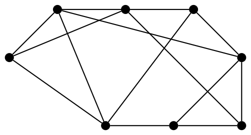
$G - V_{K_n}$ on graafi joka saadaan poistamalla G:stä kaikki graafin K_n pisteet ja niihin liittyvät viivat. Selvästi $G - V_{K_n} = \overline{K_{n+1}}$.

Graafi $G - V_{K_n}$ sisältää $n+1$ komponenttia (jokainen graafin $\overline{K_{n+1}}$ piste muodostaa oman komponentin), eli $c(G - V_{K_n}) = n+1$

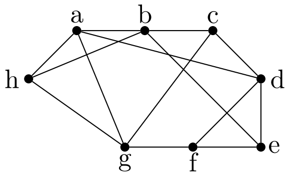
Toisaalta V_{K_n} sisältää n pistettä.

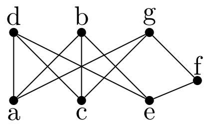
Siis $c(G - V_{K_n}) = n + 1 > n = |V_{K_n}|$. Lauseen 7.7. perusteella G ei ole Hamiltonin graafi.

5. Onko alla oleva graafi tasograafi?



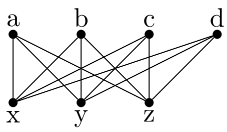
Ratk.

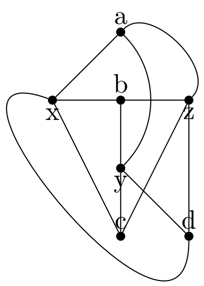
G: 

Eräs G:n aligraafi **H:** 

Koska G:n aligraafi H on graafin $K_{3,3}$ viivalaajennus, niin G ei ole tasograafi.

6. Piirrä graafi $K_{3,4}$ niin, että piirros sisältää vain kaksi viivojen risteämistä muualla kuin pisteiden kohdalla.

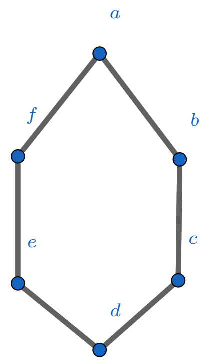
Ratk. $K_{3,4}$: 

$K_{3,4}$ toisin : 

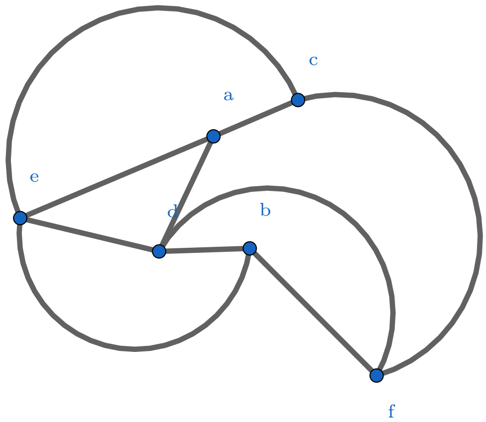
7. Graafi $\overline{C}_n$ on piirin C_n komplementti. Tutki onko graafi a) $\overline{C}_6$ b) $\overline{C}_7$ tasograafi. Jos on, niin piirrä tasoupotus. Jos ei ole, niin perustele miksi ei.

Ratk.

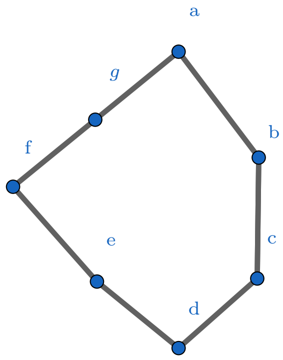
C_6



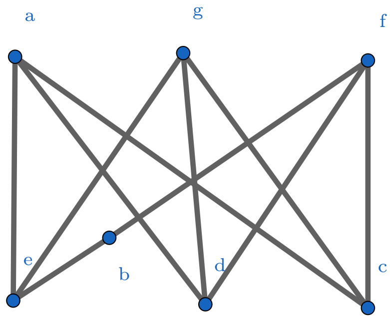
$\overline{C}_6$:n tasoupotus



C_7



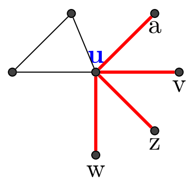
G



Nyt G on $\overline{C}_7$:n aligraafi, ja $K_{3,3}$:n viivalaajennus, joten $\overline{C}_7$ ei ole tasograafi.

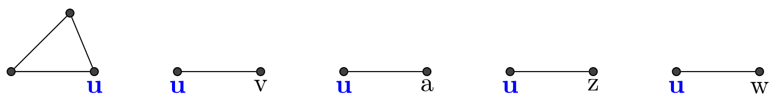
8. Onko mahdollista konstruoida yhtenäinen graafi, joka sisältää korkeintaan 9 pistettä, täsmälleen yhden irrotuspisteen, täsmälleen 4 siltaa ja ainakin 5 blokkia. Jos on, niin piirrä ehdot täyttävä graafi, johon merkitset kaikki irrotuspisteet, sillat ja blokit. Jos ei ole, niin todista miksi ei.

Ratk. Eräs ratkaisu:



Sillat ua, uv, uz ja uw. Irrotuspiste: $\{\mathbf{u}\}$

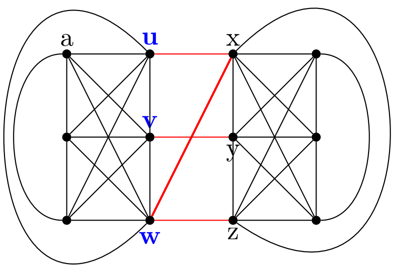
Blokit:



9. Piirrä graafi G, jolle $\kappa(G) = 3$, $\lambda(G) = 4$ ja $\delta(G) = 5$, missä $\kappa(G)$ tarkoittaa graafin (piste)yhtenäisyyttä (connectivity), $\lambda(G)$ viivayhtenäisyyttä (line-connectivity) ja $\delta(G)$ on graafin pisteiden pienin aste (=degree).

Ratk.

G:



Pienin separoiva joukko $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$, eli $\kappa(G) = 3$.
Pienin viivairrotusjoukko $\{ux, vy, wz, wx\}$, eli $\lambda(G) = 4$.
Pienin aste $\delta(G) = deg_G(a) = 5$.

10. Olkoot $0 < k \leq l \leq d$ positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että on olemassa graafi G, jolle $\kappa(G) = k$, $\lambda(G) = l$ ja $\delta(G) = d$.

Ratk. Olkoot G_1 ja G_2 kaksi erillistä täydellisen graafin K_{d+1} kopiota. Olkoon pistejoukko A_1 graafin G_1 k:n pisteen joukko, $A_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ ja vastaavasti A_2 graafin G_2 k:n pisteen joukko, $A_2 = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$. Muodostetaan uusi graafi jossa liitetään graafit G_1 ja G_2 sopivasti toisiinsa.

Tarkasti: $G = (V_{G_1} \cup V_{G_2}, E_{G_1} \cup E_{G_2} \cup E)$, missä $E = \{u_i v_i |$ aina kun $i = 1, 2, \ldots, k\} \cup \{u_1 v_j |$ aina kun $j = k+1, k+2, \ldots l\}$.

Nyt $|V_{G_1}| = d + 1 > k$, joten ainakin yksi graafin G_1 piste ei ole minkään viivajoukon E viivan päätepiste, joten $\delta(G) = \delta(G_1) = d$.

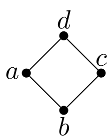
Pistejoukko $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ on graafin G pienin irrotusjoukko, joten $\kappa(G) = k$. Viivajoukko E on G:n pienin viivairrotusjoukko, joten $\lambda(G) = l$.

11. Määrää graafin $\overline{K_2} + C_4$ yhtenäisyys- ja viivayhtenäisyysluku.

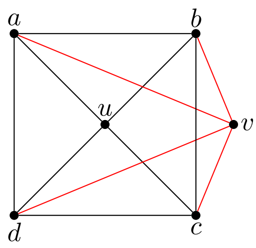
Ratk.

$\mathbf{\overline{K}_2}$**:**

$\mathbf{C_4}$**:**



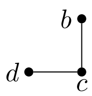
$\mathbf{G = \overline{K}_2 + C_4}$**:**



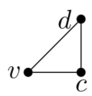
Graafin pienin aste $\delta(G) = 4$, joten $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq 4$. Osoitetaan, että $\kappa(G) > 3$.

Neljä erilaista 3:n pisteen poistoa:

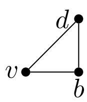
$\mathbf{G \setminus \{a, u, v\}}$**:**



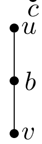
$\mathbf{G \setminus \{a, b, u\}}$**:**



$\mathbf{G \setminus \{a, c, u\}}$**:**



$\mathbf{G \setminus \{a, b, c\}}$**:**



Kaikki 3:n pisteen poiston jälkeen saatavat graafit ovat yhtenäisiä. Siis $\kappa(G) > 3$.

Silloin $3 < \kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G) = 4$. Siis $\kappa(G) = \lambda(G) = 4$.