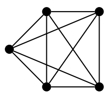
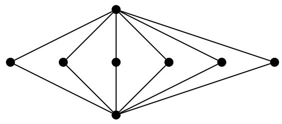
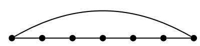
TIETOTEKNIIKAN MATEMATIIKKA

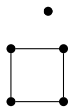
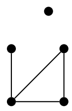
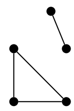
Harjoitus 5 syksy 2019 Ratkaisut

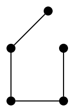
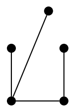
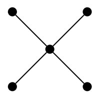
1. Piirrä seuraavat graafit a)K_5, b)$K_{2,6}$ c) P_7 d) C_7.

Ratk. $\mathbf{K_5}$:  $\mathbf{K_{2,6}}$:  $\mathbf{P_7}$: $\mathbf{C_7}$: 

2. Piirrä kaikki 5 pistettä ja 4 viivaa sisältävät ei isomorfiset graafit.

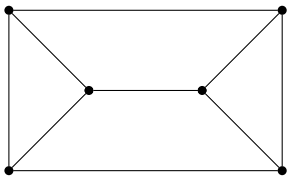
Ratk.

Epäyhtenäiset:   **ja** 

Yhtenäiset:   **ja** 

3. Onko mahdollista piirtää a) 3-säännöllinen 6 pistettä sisältävä graafi, b) 3-säännöllinen 7 pistettä sisältävä graafi. Jos on mahdollista, niin piirrä graafi. Jos ei ole mahdollista, niin perustele miksi ei.

Ratk.

a) On: 

b) Jos 3-säännöllisessä graafissa on 7 pistettä, niin asteiden summa $\sum deg(v) = 7 \cdot 3 = 21$. Koska 21 on pariton, niin Kättelylauseen (Lause 7.2.) perusteella tällaista graafia ei ole olemassa.

4. Heikki ja Hanna pitivät juhlat, joihin osallistui 3 muuta pariskuntaa. Juhlan aikana useat osallistujat kättelevät toisiaan, niin, että kukaan ei kättele itseään eikä puolisoaan ja samaa kättelyä ei tapahdu kahdesti. Tervehdysten jälkeen Heikki kysyi jokaiselta läsnäolijalta (myös Hannalta) montako kättelyä hän oli tehnyt. Jokainen antoi vastaukseksi eri määrän. Montako kertaa Heikki tervehti? Montako kertaa Hanna?

Ratk. Kättelyt graafina. Pisteet ovat osallistujat. Pisteet (eli kättelijät) nimetään kättelyiden lukumäärällä ja nimillä "Hanna"ja "Heikki". Viivat ovat tapahtuneet kättelyt, jolloin pisteen aste on henkilön tekemien kättelyiden lukumäärä.

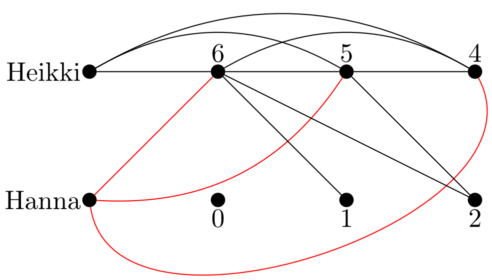
Juhlissa on 8 henkilöä. Koska itseä ja puolisoa ei kätellä, niin maksimiaste (kättelyiden suurin lukumäärä yhdellä henkilöllä) on 6. Henkilöistä 7 tekee eri määrän kättelyitä, joten kaikki asteet $0, 1, 2, 3, 4, 5$ ja 6 esiintyvät.

6 kättelee muut paitsi puolisonsa. Siis 0 on 6:n puoliso.

5 kättelee muut paitsi 0:n ja puolisonsa. Siis 1 on 5:n puoliso.

4 kättelee muut paitsi 0:n, 1:n ja puolisonsa. Siis 2 on 4:n puoliso.

Hanna kättelee 3:a, samoin Heikki.



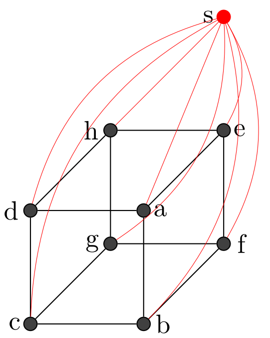
5. **Tiedonsiirto-ongelma** (Transmitting problem)

Olkoon G graafi, josta saadaan graafi G_s lisäämällä siihen uusi piste s (=lähde) ja viiva pisteestä s jokaiseen graafin G pisteeseen. Jokaisena aikayksikkönä lähde s voi lähettää viestin yhteen G:n pisteeseen ja jokainen viestin jo saanut piste voi välittää viestin kaikille naapureilleen G:ssä. Kuinka monta aikayksikköä $t(G)$ tarvitaan, että jokainen G:n piste on vastaanottanut viestin?

Määrää $t(Q_3)$.

Ratk.

$(\mathbf{Q_3})_\mathbf{s}$:



(i) Yläraja $t(Q_3)$:lle:

Ajanhetki 1: $s \to a$
Ajanhetki 2: $s \to g, a \to b,\ a \to d\ a \to e$
Ajanhetki 3: $s \to f,\ g \to c$ ja $d \to h$.

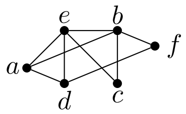
Siis $t(Q_3) \leq 3$.

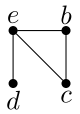
(ii) Osoitetaan, että $t(Q_3) > 2$.

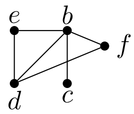
Aina kun piste $v \in \{a, b, c, d, f, g, h\}$ niin on olemassa kaksi eri pistettä joukosta $\{a, b, c, d, f, g, h\}$ jotka eivät ole kumpikaan piste v tai v:n naapuri. Lähetettäessä ajanhetkellä 1 pisteestä s viesti mihin tahansa pisteeseen v, niin on ainakin kaksi pistettä, jotka eivät ole v:n tavoitettavissa ajanhetkellä 2. Koska pisteestä s voidaan ajanhetkellä 2 lähettää viesti vain yhteen pisteeseen, niin ajanhetkellä 2 ei saavuteta kaikkia pisteitä. Siis $t(Q_3) > 2$.

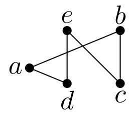
Kohtien (i) ja (ii) perusteella $t(Q_3) = 3$.

6. Tarkastellaan alla olevia graafeja.

G:


H:


J:


K:


a) Mitkä graafeista ovat G:n aligraafeja? Mitkä niistä ovat G:n indusoituja aligraafeja?

b) Montako 5:n pituista graafin G polkua on pisteestä a pisteeseen f. Mikä on pisin kulku pisteestä a pisteeseen f?

c) Moniko K:n aligraafeista virittää K:n?

Ratk. a) H on indusoitu aligraafi $G[\{e, b, c, d\}]$.

J ei ole G:n aligraafi, sillä viiva $bd \in E_J$, mutta $bd \notin E_G$.

K on G:n aligraafi. K ei ole indusoitu aligraafi, sillä viiva $eb \notin E_K$, vaikka $eb \in E_G$ ja pisteet $e, b \in V_K$.

b) Graafin G 5:n pituiset polut $a \xrightarrow{*} f$:

$a \to d \to e \to c \to b \to f$

$a \to b \to c \to e \to d \to f$

Ei muita, eli 2 kpl.

Ei pisintä kulkua $a \xrightarrow{*} f$, sillä jokaista kokonaislukua n kohti on olemassa kulku

$a \to \overbrace{e \to a \to e \to a \to \cdots \to a}^{\text{Pituus } \geq n} \to e \to d \to f.$

c) Graafissa K on 5 viivaa. Jos K' on K:n virittävä aliraafi, niin jokaiselle viivalle e_1 joko $e_1 \in E_{K'}$ tai $e_1 \notin E_{K'}$. Erilaisia virittäviä aligraafeja on siis $2^5 = 32$ kpl.

7. Piirrä yksi graafi, joka toteuttaa **kaikki** seuraavat ehdot:

(1) Graafissa on täsmälleen 3 komponenttia ja korkeintaan 11 pistettä.

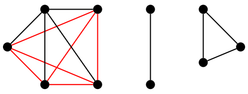
(2) Graafi sisältää täsmälleen kaksi pistettä joiden aste on 1.

(3) Graafi sisältää aligraafinaan täydellisen graafin K_5.

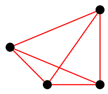
Määrää piirtämäsi graafin (piirrä erilleen) yhtenäinen indusoitu aligraafi jossa on täsmälleen 4 pistettä.

Ratk. Eräs ratkaisu:

G :



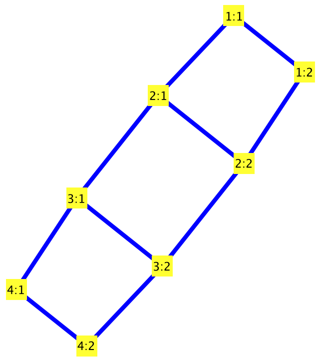
Yhtenäinen indusoitu aligraafi jossa on täsmälleen 4 pistettä:



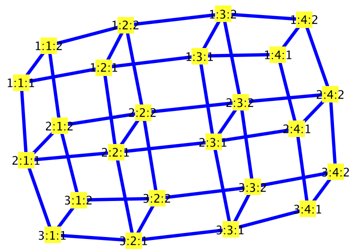
8. Piirrä graafit a) $P_2 \times P_4$, b) $P_3 \times P_2 \times P_4$ c) $P_2 \times C_3$ d) $K_2 + \overline{K_4}$.

Ratk

a) $P_2 \times P_4$:

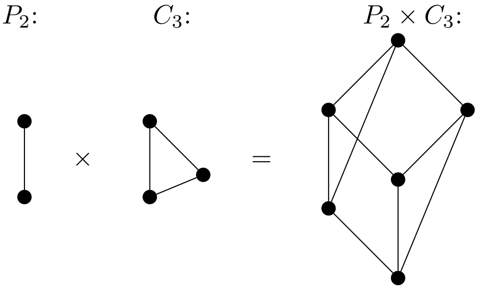


b) $P_3 \times P_2 \times P_4$:



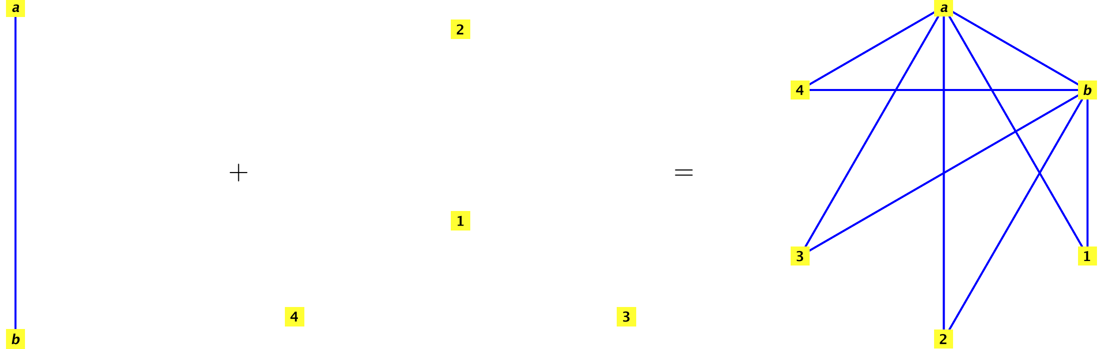
c)

P_2: C_3: $P_2 \times C_3$:



d)

K_2: $\overline{K_4}$: $K_2 + \overline{K_4}$:



9. Olkoon $\delta(G)$ graafin G pisteiden pienin aste, eli $\delta(G) = \min\{deg_G(v) | v \in V_G\}$. Osoita, että G sisältää $\delta(G)$:n pituisen polun. (Tarkastele graafin G pisintä polua.)

Ratk.Väite: G sisältää $\delta(G)$:n pituisen polun.

Tod. Jos $\delta(G) = 0$ (eli G sisältää irtopisteen), niin Väite on voimassa.

Voidaan olettaa, että $\delta(G) > 0$.

Olkoon $P : u \xrightarrow{*} v$ graafin G pisin polku.

Jos x on u:n naapuri ja x ei esiinny polussa P, niin polku

$xP : x \to u \xrightarrow{*} v$ on pidempi kuin P. Tämä on ristiriita, koska P oli pisin polku. Tällöin jokainen pisteen u naapuri esiintyy polussa P.

Siis $|P| > deg(u) \geq \delta(G)$.