TIETOTEKNIIKAN MATEMATIIKKA

Harjoitus 4 syksy 2019 Ratkaisut

1. a) Luettele seuraavat joukot alkioittain: (i) $\{x \in \mathbb{R}|\ |x| = 1\}$ (ii) $\{x \in \mathbb{Z}|\ |x| < 10\}$ (iii) $\{x|\ x = y^2$ jollakin $y \in \mathbb{Z}$ ja $x < 30\}$ (iv) $\{xy|\ x \in \{-1, 0, 1\}, y \in \{1, 2, 3, 4, \ldots\}\}$. (v) $\{x \in \mathbb{Z}|\ x^2 = 2\}$.

   b) Kirjoita seuraavat joukot muodossa { lauseke | ehto }: (i) $\{3, 8, 13, 18, \ldots\}$ (ii) $\{\ldots, \frac{1}{81}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{3}, 1, -3, 9, -27, 81, \ldots\}$.

   Ratk. a) (i) $\{-1, 1\}$ (ii) $\{-9, -8, -7, \ldots, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$ (iii) $\{1, 4, 9, 16, 25\}$ (iv) $\mathbb{Z}$ (v) $\emptyset$.

   b) (i) $\{5n + 3|\ n \in \mathbb{N}\}$ (ii) $\{(-1)^n 3^n|\ n \in \mathbb{Z}\}$.

2. Mitä ehtoja joukkojen M ja N tulee täyttää (kussakin kohdassa erikseen), jotta seuraavat väittämät olisivat tosia: a) $M \cup N = M$ b) $M \cap N = M$ c) $M \setminus N = M$ d) $M \setminus N = \emptyset$ e) $M \setminus N = N \setminus M$.

   Ratk. a) $N \subseteq M$. **b)** $M \subseteq N$ **c)** $M \cap N = \emptyset$. **d)** $M \subseteq N$ **e)** $M \setminus N = N \setminus M$. Oltava $M \setminus N = \emptyset$, eli $M \subseteq N$ ja $N \setminus M = \emptyset$, eli $N \subseteq M$. Siis $N = M$.

3. Olkoon $n \geq 1$ kokonaisluku. Ei-negatiivisille kokonaisluville a ja b on $a = b \bmod n$, jos ja vain jos a:lla ja b:llä on sama jakojäännös luvulla n jaettaessa. Olkoon R suhde ei-negatiivisten kokonaislukujen joukossa, jolle

   a) $(a, b) \in R$ jos ja vain jos $a = b \bmod 4$,

   b) $(a, b) \in R$ jos ja vain jos ($a = b \bmod 4$ tai $a = b \bmod 6$).

   Tutki molemmissa tapauksissa onko R ekvivalenssisuhde ei-negatiivisten kokonaislukujen joukossa. Jos on, niin määrää R:n ekvivalenssiluokat. Jos R ei ole ekvivalenssisuhde, niin perustele miksi ei.

   Ratk. a) Nyt $a = b \mod 4$ jos ja vain jos ($a = 4q_1 + r$ ja $b = 4q_2 + r$ jollakin kokonaisluvulla $0 \leq r \leq 3$).

   (i) Selvästi $a = a \mod 4$ kaikilla a, joten $(a, a) \in R$ kaikilla a, joten R on refleksiivinen.

   (ii) Jos $(a, b) \in R$, eli $a = 4q_1 + r$ ja $b = 4q_2 + r$ jollakin kokonaisluvulla $0 \leq r \leq 3$, niin varmasti on $b = 4q_2 + r$ ja $a = 4q_1 + r$. Siis $(b, a) \in R$, ja R on symmetrinen.

   (iii) Jos $(a, b) \in R$ ja $(b, c) \in R$, niin silloin $a = 4q_1 + r_1$ ja $b = 4q_2 + r_1$ jollakin kokonaisluvulla $0 \leq r_1 \leq 3$, ja $b = 4q_3 + r_2$ ja $c = 4q_4 + r_2$ jollakin kokonaisluvulla $0 \leq r_2 \leq 3$.

   Koska on oltava $4q_2 + r_1 = 4q_3 + r_2$, niin $r_1 = r_2$. Silloin on $a = c \mod 4$, eli $(a, c) \in R$.

   Siis R on transitiivinen.

   (i)-(iii) perusteella R on ekvivalenssisuhde.

   Ekvivalenssiluokat:

   $[0]_R = \{0, 4, 8, 12, \ldots\} = \{x|x = 4q + 0\}$

   $[1]_R = \{1, 5, 9, 13, \ldots\} = \{x|x = 4q + 1\}$

   $[2]_R = \{2, 6, 10, 14, \ldots\} = \{x|x = 4q + 2\}$

   $[3]_R = \{3, 7, 11, 15, \ldots\} = \{x|x = 4q + 3\}$

   b) $(a, b) \in R$ jos ja vain jos ($a = b \bmod 4$ tai $a = b \bmod 6$).

   Selvästi $(5, 9) \in R$, koska $5 = 1 \cdot 4 + 1$ ja $9 = 2 \cdot 4 + 1$.

   Myös $(9, 15) \in R$, koska $9 = 1 \cdot 6 + 3$ ja $15 = 2 \cdot 6 + 3$.

   Nyt $(5, 15) \notin R$, sillä $5 = 1 \cdot 4 + 1$, $15 = 3 \cdot 4 + 3$, ja $5 = 0 \cdot 6 + 5$ ja $15 = 2 \cdot 6 + 3$.

   Siis R ei ole transitiivinen, eikä siten ekvivalenssisuhde.

4. a) Olkoot $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ja $B = \{1, 2\}$. Mitkä ovat joukot (i) $A \times B$ (ii) $B \times A$ (iii) $B \times B$ (iv) $\{x \in \mathbb{R}|\ 0 \leq x \leq 1\} \times B$.

   b) Olkoon $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Määritellään joukon U suhde R seuraavasti:

   $$(u, v) \in R \text{ täsmälleen silloin kun } u - v \text{ on tasan jaollinen luvulla 3.}$$

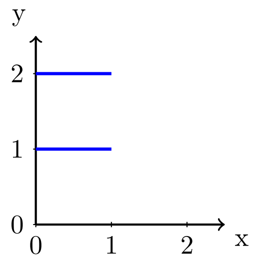
   Tutki on R ekvivalenssisuhde joukossa U. Jos on, niin määrää R:n ekvivalenssiluokat. Jos R ei ole ekvivalenssisuhde, niin perustele miksi ei.

Ratk. a) (i) $A \times B = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)\}$.

(ii) $B \times A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4)\}$

(iii) $B \times B = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

(iv) $\{x \in \mathbb{R} \mid \ 0 \leq x \leq 1\} \times B = \{(x,y) \mid \ 0 \leq x \leq 1, y \in \{1,2\}\}$.



b) (i) Koska $u - u = 0 = 0 \cdot 3$, niin $(u,u) \in R$ kaikilla $u \in U$. Siis R on refleksiivinen.

(ii) Jos $(u,v) \in R$, niin $u - v = 3n$ jollakin kokonaisluvulla n. Silloin $v - u = -3n = 3(-n)$, eli $(v,u) \in R$. Siis R on symmetrinen.

(iii) Jos $(u,v) \in R$ ja $(v,w) \in R$, niin $u - v = 3n$ ja $v - w = 3m$ joillakin kokonaisluvuilla n ja m. Silloin $u - w = u - v + v - w = (u - v) + (v - w) = 3n + 3m = 3(n + m)$. Siis $(u,w) \in R$, joten R on transitiivinen.

Kohtien (i)-(iii) perusteella R on ekvivalenssisuhde.

Nyt $(1,4),(1,7) \in R$, joten $[1] = [4] = [7] = \{1,4,7\}$. Vastaavasti $[2] = [5] = \{2,5\}$ ja $[3] = [6] = \{3,6\}$. siis $U = \{1,4,7\} \cup \{2,5\} \cup \{3,6\}$.

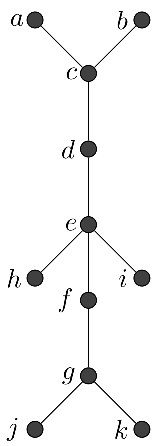
5. Kylässä on miespuolinen parturi, joka ajaa niiden ja vain niiden kylän miesten parran jotka eivät aja omaa partaansa. Ajaako parturi oman partansa?

   Ratk. Joukko-oppi ei aina ole niin yksinkertaista. Kts. esim. Wikipedia Russellin paradoksi.

6. Määrää vähintään 11 alkiota sisältävä joukko A ja joukon A sellainen osittainjärjestys $\preceq$, että järjestyksellä $\preceq$ on joukossa A täsmälleen 2 maksimaalista ja täsmälleen 4 minimaalista alkiota. Piirrä määrittelemäsi osittainjärjestyksen $\preceq$ järjestyskuvio ja merkitse siihen kaikki minimaaliset ja maksimaaliset alkiot. Määrää myös joukon A osajoukko, jossa määrittelemäsi järjestys on jonojärjestys. Määrää lisäksi osittainjärjestyksesi kanssa yhteensopiva jonojärjestys.

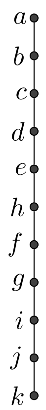
   Ratk. Useita ratkaisuja. Esimerkiksi $A = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k\}$.

Järjestyskuvio:



Minimaaliset alkiot: $\{h,i,j,k\}$.
Maksimaaliset alkiot: $\{a,b\}$
Osittainen järjestys on jonojärjestys
esimerkiksi joukossa $\{a,c,d,e,f,g\}$

Yhteensopiva jonojärjestys:



7. Olkoon perusjoukkona U Tietotekniikan matematiikan 1. välikokeeseen syksyllä 2019 ajoissa ilmoittautuneet opiskelijat (eli se joukko jonka välikoe tarkastetaan). Määrää jokin joukon U suhde joka on antisymmetrinen ja transitiivinen, mutta ei ole osittainjärjestys.

   Ratk. Eräs ratkaisu: $x \prec y$ täsmälleen silloin kun x:n kengännumero on pienempi kuin y:n. Selvästi aina kun $x \prec y$, niin $y \not\prec x$ eli suhde on antisymmetrinen. Suhde on myös transitiivinen. Koska $x \not\prec x$, aina kun $x \in U$ (yksikin x riittäisi), niin suhde ei ole refleksiivien, eli $\not\prec$ ei ole osittainjärjestys joukossa U.

8. Vanhassa lasten pelissä kaksi pelaajaa valitsee kumpikin yhtäaikaa sovituin käsimerkin joko sakset, kiven tai paperin. Häviäjä saadaan selville seuraavien tietojen perusteella:
   - kivi häviää paperille (paperi peittää kiven)
   - sakset häviävät kivelle (kivi tylsyttää sakset)
   - paperi häviää saksille (sakset leikkaavat paperia)

   Jos pelaajat valitsivat saman esineen, niin kumpikaan ei hävinnyt.

   Määritellään joukon $U = \{\text{sakset}, \text{kivi}, \text{paperi}\}$ suhde R seuraavasti:

   $$(X, Y) \in R \text{ täsmälleen silloin kun } X \text{ei häviä } \ Y\text{:lle.}$$

   Onko suhde R refleksiivinen, symmetrinen, antisymmetrinen ja/tai transitiivinen ? Perustele vastauksesi.

   Ratk. Merkitään $S =$ Sakset, $P =$ Paperi ja $K =$ Kivi. Silloin $U = \{S, P, K\}$ ja suhde

   $R = \{(S, S), (P, P), (K, K), (S, P), (P, K), (K, S)\}$.

   $(S, S), (P, P), (K, K) \in R$, joten R on refleksiivinen.

   $(S, P) \in R$ ja $(P, S) \notin R$, joten R ei ole symmetrinen

   $(S, P) \in R$ ja $(P, S) \notin R$, $(P, K), \in R$ ja $(K, P) \notin R$ ja $(K, S) \in R$ ja $(S, K) \notin R$, joten R on antisymmetrinen.

   $(S, P) \in R$, $(P, K) \in R$ ja $(S, K) \notin R$, joten R ei ole transitiivinen.

9. Olkoon perusjoukko U kaikki Oulun yliopiston opiskelijat. Määrittele joukon U suhde, joka on refleksiivinen, mutta ei ole ekvivalenssisuhde, eikä osittainen järjestys.

   Ratk. Eräs suhde: $(x, y) \in R$ täsmälleen silloin kun x ja y opiskelevat samaa matematiikan kurssia.

   Selvästi R on refleksiivinen.

   Toisaalta opiskelijoiden joukossa on olemassa opiskelijat a, b, c niin, että a ja b suorittavat samaa matematiikan kurssia, jolla c ei ole, b ja c opiskelevat toista matematiikan kurssia, jolla a ei ole ja a ja c eivät opiskele samalla matematiikan kurssilla. Siis $(a, b) \in R$, $(b, c) \in R$, mutta $(a, c) \notin R$. Silloin R ei ole transitiivinen, eli ei ekvivalenssisuhde, eikä osittainen järjestys.