

TIETOTEKNIIKAN MATEMATIIKKA

Harjoitus 3 syksy 2019

1. Osoita, että $2^n < n!$ aina kun $n = 4, 5, \dots$
2. Luvut a_n määritellään seuraavalla palautuskaavalla (rekursiivisella kaavalla): $a_n = a_{n-1} + 3$ ($n = 2, 3, 4, 5, \dots$) ja lisäksi tiedetään, että $a_1 = 2$. Määrää lukujonon a_n 10 ensimmäistä jäsentä ja päättele tämän jälkeen luvun a_n arvo. Todista lopuksi, että luku a_n saa päättelemäsi arvon.
3. Osoita matemaattisen induktion avulla, että $3^n > 2n$ aina kun $n = 1, 2, 3, \dots$
4. Neliön muotoinen alue on jaettu 7:llä vaakasuoralla viivalla 8:ksi nauhaksi. Kun alueen lävistää yksikin pystysuora viiva, saadaan suorakaiteen muotoisia ruutuja. Osoita että piirtämällä mielivaltaisen monta (ainakin yksi, mutta kuitenkin äärellinen määrä) pystysuoraa alueen leikkaavaa viivaa saadaan ruudukko, jonka ruudut voidaan värittää mustiksi ja valkoisiksi siten, että kahdella mustalla ruudulla ei ole yhteistä sivuviivaa eikä kahdella valkoisella ruudulla ole yhteistä sivuviivaa (saadaan shakkilautakuvio).
5. Joukkoa C_m , joka koostuu m :n merkin mittaisista 0:ia ja 1:siä käsittelevistä jonoista, sanotaan virheen havaitsevaksi, jos mitkä tahansa kaksi C_m :n jonoa poikkeavat toisistaan ainakin kahden merkkipaikan osalta toisistaan. Esimerkiksi joukko $C_3 = \{010, 100, 001\}$ on virheen havaitseva mutta joukko $C_3 = \{010, 001, 101\}$ ei ole koska jonot 001 ja 101 poikkeavat toisistaan vain ensimmäisen (=yhden) kirjainpaikan osalta. Osoita, että kun C_m :ssä on ainakin $2^{m-1} + 1$ jonoa, niin C_m ei ole virheen havaitseva millään $m = 2, 3, 4, 5, \dots$ Luettele kaikki C_2 :t joissa $2^{2-1} + 1$ jonoa.

6. Osoita, että

$$\sum_{i=1}^{m+n} i = \left(\sum_{i=1}^m i\right) + \left(\sum_{i=1}^n i\right) + mn$$

aina kun n ja m ovat luonnollisia lukuja.

7. Osoita matemaattisen induktion avulla, että vähintään 15 opiskelijan joukko voidaan aina jakaa ryhmiin, joissa jokaisessa on 4 tai 5 opiskelijaa.
8. Esitä a)luku $(545626)_{10}$ 7-kantaisena ja 19-kantaisena, b)luku $(1F0EBC)_{16}$ 11-kantaisena, c) $(10011111101101)_2$ okta- ja heksalukuna, d)heksaluku AEC934 binäärilukuna ja oktalukuna.
9. Olkoon $A = (1433110)_{10}$ ja $B = (110999)_{10}$. Laske $A - B$ ja $B - A$ käyttämällä vähennyslaskua ilman lainaamista.
10. Kun 16-järjestelmän luvut ovat suuruusjärjestyksessä $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F$ ja luku $X = (8946AF)_{16}$ ja $Y = (F347)_{16}$, niin laske erotus $X - Y$ käyttäen vähennyslaskua ilman lainaamista. Laskut on tehtävä 16-järjestelmässä. Kaikki laskut on esitettävä.
11. 2-järjestelmän luvut ovat suuruusjärjestyksessä 0 ja 1 ja vastaavasti 16-järjestelmän luvut ovat $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F$. Luku $X = (7AD)_{16}$ ja luku $Y = (BC)_{16}$. Lausu luvut X ja Y 2-järjestelmässä. Käytä alla olevaa muunnostaulukkoa. Laske sen jälkeen erotus $Y - X$ käyttäen vähennyslaskua ilman lainaamista. Laskut on tehtävä 2-järjestelmässä. Kaikki laskut on esitettävä. (3p)

Heksaluvut	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
Binääriluvut	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111