TIETOTEKNIIKAN MATEMATIIKKA

Harjoitus 2 syksy 2019 Ratkaisuja

1. Osoita resoluutiomenettelyllä (jos mahdollista), että

a)$\{(C \to A) \vee (D \to B), A \to E, (B \wedge F)', (C \vee E) \wedge (F \to D), E'\} \vDash F'$. b)$\{A \vee (B' \wedge C), (A \vee D)'\} \vDash B'$.

Ratk. a) Vastaava päättely: $\{(C \to A) \vee (D \to B), A \to E, (B \wedge F)', (C \vee E) \wedge (F \to D), E', F\} \vDash 0$.

Konjunktit: $(C \to A) \vee (D \to B) = C' \vee A \vee D' \vee B = C_1$

$A \to E = A' \vee E = C_2$

$(B \wedge F)' = B' \vee F' = C_3$

$(C \vee E) \wedge (F \to D) = (C \vee E) \wedge (F' \vee D)$. Nyt $C_4 = C \vee E$ ja $C_5 = F' \vee D$.

$C_6 = E'$ ja $C_7 = F$.

Vastaava päättely: $\{C_1, C_2, \ldots, C_7\} \vDash 0$

C_1 ja C_2: $C_8 = B \vee C' \vee D' \vee E$

C_3 ja C_8: $C_9 = C' \vee D' \vee E \vee F'$

C_4 ja C_9: $C_{10} = D' \vee E \vee F'$

C_5 ja C_{10}: $C_{11} = E \vee F'$

C_6 ja C_{11}: $C_{12} = F'$

C_{12} ja C_7: $C_{13} = 0$

Resoluutiomenettely pysähtyy ja koska 0 saatiin pääteltyä, niin

$\{(C \to A) \vee (D \to B), A \to E, (B \wedge F)', (C \vee E) \wedge (F \to D), E'\} \vDash F'$.

b) Vastaava päättely: $\{A \vee (B' \wedge C), (A \vee D)', B\} \vDash 0$.

Konjunktit: $A \vee (B' \wedge C) = (A \vee B') \wedge (A \vee C)$. Siis $C_1 = A \vee B'$ ja $C_2 = A \vee C$.

$(A \vee D)' = A' \wedge D'$. Siis $C_3 = A'$ ja $C_4 = D'$.

$C_5 = B'$.

Vastaava päättely: $\{C_1, C_2, \ldots, C_5\} \vDash 0$

C_1 ja C_2: $B' \vee C = C_6$.

C_2 ja C_3: $C = C_7$.

C_1 ja C_3: B' (on jo C_5)

Ei muita.

Resoluutiomenettely pysähtyy koska uusia konjunteja ei enää muodostu. Aina epätotta lausetta 0 ei saatu pääteltyä, joten päättelyä ei voida suorittaa.

2. Osoita resoluutiomenettelyllä (jos mahdollista), että

a) $\{(B \to C')', F, ((B \wedge C) \to A) \wedge (C \vee D' \vee F')\} \vDash A$

b)$\{A \to (B \to C), A \vee D, (E \vee D) \to B\} \vDash (C' \to E')$

Perustele vastauksesi. Merkitse tarkasti näkyviin resoluutiomenettelyn eri vaiheet.

Ratk. a) Vastaava päättely: $\{(B \to C')', F, ((B \wedge C) \to A) \wedge (C \vee D' \vee F'), A'\} \vDash 0$ Konjunktit: $(B \to C')' = (B' \vee C')' = B \wedge C$, $C_1 = B, C_2 = C$.

$F = C_3$

$((B \wedge C) \to A) \wedge (C \vee D' \vee F') = (B' \vee C' \vee A) \wedge (C \vee D' \vee F')$, $C_4 = B' \vee C' \vee A$ ja $C_5 = C \vee D' \vee F'$,

$A' = C_6$.

Vastaava päättely: $\{C_1, C_2, \ldots, C_6\} \vDash 0$

C_1 ja C_4: $C' \vee A = C_7$.

C_6 ja C_7: $C' = C_8$.

C_2 ja C_8: 0.

Resoluutiomenettely pysähtyy, koska 0 saatiin pääteltyä.

Silloin $\{C_1, C_2, \ldots, C_6\} \vDash 0$, eli myös

$\{(B \to C')', F, ((B \wedge C) \to A) \wedge (C \vee D' \vee F'), A'\} \vDash 0$ ja siis

$\{(B \to C')', F, ((B \wedge C) \to A) \wedge (C \vee D' \vee F')\} \vDash A$.

b) Vastaava päättely:

$$\{A \to (B \to C), A \vee D, (E \vee D) \to B, (C' \to E')'\} \vDash 0$$

Nyt $A \to (B \to C) = A' \vee B' \vee C = C_1$.

$A \vee D = C_2$,

$(E \vee D) \to B = (E \vee D)' \vee B) = (E' \wedge D') \vee B = (E' \vee B) \wedge (D' \vee B)$, eli $E' \vee B = C_3$ ja $D' \vee B = C_4$.

$(C' \to E')' = (C \vee E')' = C' \wedge E$, eli $C' = C_5$ ja $E = C_6$.

Vastaava päättely $\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\} \vDash 0$.

Resoluutiosääntöä soveltamalla:

C_3 ja C_6: $B = C_7$.

C_7 ja C_1: $A' \vee C = C_8$.

C_8 ja C_5: $A' = C_9$.

C_9 ja C_2: $D = C_{10}$.

C_5 ja C_1: $A' \vee B = C_{11}$.

C_{11} ja C_2: $B \vee D = C_{12}$.

Ei muita.

Resoluutiomenettely pysähtyy, eikä 0:aa saatu pääteltyä. Siis

$\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\} \nvDash 0$, eli $\{A \to (B \to C), A \vee D, (E \vee D) \to B\} \nvDash (C' \to E')$.

3. Muunna alla oleva päättely symbolimuotoon. Osoita sen jälkeen päättelyn oikeellisuus tai muodosta vastaesimerkki joka osoittaa, että päättely on virheellinen.

Oletukset: Jos menet naimisiin, niin kadut. Jos et mene naimisiin, niin sitäkin kadut.

Johtopäätös: Jos siis menet naimisiin tai olet menemättä, niin joka tapauksessa kadut.

Ratk. Olkoot A: "Menet naimisiin" ja B: "Kadut". Päättely $\{A \to B, A' \to B\} \vDash (A \vee A') \to B$.

Vastaava päättely: $\{A \to B, A' \to B, [(A \vee A') \to B]'\} \vDash 0$.

Konjunktit: $A \to B = A' \vee B = C_1$,

$A' \to B = A \vee B = C_2$,

$[(A \vee A') \to B]' = [(A \vee A')' \vee B]' = [(1)' \vee B]' = (0 \vee B)' = B' = C_3$.

Vastaava päättely: $\{C_1, C_2, C_3\} \vDash 0$

C_1 ja C_2: $C_4 = B$.

C_3 ja C_4: $C_5 = 0$.

Resoluutiomenettely pysähtyy ja koska 0 saatiin pääteltyä, niin päättely on oikein.

4. 4. Olkoon perusjoukkona U kaikki maailman ihmiset. Käytetään seuraavia predikaatteja: $P(x)$: "x on pääministeri", $T(x,y)$: "x tukee y:tä", $B(x)$: "x kannattaa kovaa Brexitiä", $K(x)$: "x on konservatiivi", $E(x)$: "x pelkää erottamista", ja seuraavaa alkiota perusjoukosta: J: "Tomson". Kirjoita lauseet a)-c) merkkimuotoon:

   a) Jokainen Tomsonia tukeva on konservatiivi, joka pelkää erottamista tai kannattaa kovaa Brexitiä.

   b) Ainakin yksi konservatiivi on itseään tukeva kovaa brexitiä kannattava erottamista pelkäävä pääministeri.

   c) Tomson on kovaa Brexitiä kannattava pääministeri, jos yksikin konservatiivi pelkää erottamista.

Ratk. a) $\forall x[T(x,J) \to [K(x) \wedge (E(x) \vee B(x))]]$

b) $\exists x[K(x) \wedge T(x,x) \wedge B(x) \wedge E(x) \wedge P(x)]$ **c)** Sama lause toisin: Jos yksikin konservatiivi pelkää erottamista, niin Tomson on kovaa brexitiä kannattava pääministeri. $[\exists x(K(x) \wedge E(x))] \to (P(J) \wedge B(J))$

5. Olkoon perusjoukkona U kaikki maailman ihmiset. Käytetään seuraavia predikaatteja: $P(x)$: "x on presidentti", $T(x, y)$:"x tietää y:stä jotain", $S(x, y)$:"x tekee sopimuksia y:n kanssa" , $V(x)$:"x kertoo vaihtoehtoisia totuuksia"ja seuraavia alkiota perusjoukosta: D: "Aku" ja Pu:"Tupin".

   Kirjoita lauseet a)-c) merkkimuotoon

   a) Jokainen vaihtoehtoisia totuuksia kertova presidentti, josta Tupin tietää jotain, tekee sopimuksia Tupinin kanssa.

   b) Ei ole totta, että jokainen presidentti tekee sopimuksia jokaisen hänestä jotain tietävän kanssa.

   c) Aku tietää itsestään jotain täsmälleen silloin, kun hän ei ole vaihtoehtoisia totuuksia kertova Tupinin kanssa sopimuksia tekevä presidentti.

   Ratk. a) $\forall x[(V(x) \wedge P(x) \wedge T(Pu, x)) \rightarrow S(x, Pu)]$ **b)**$\{\forall x \forall y[(P(x) \wedge T(y, x)) \rightarrow S(x, y)]\}'$
   c) $T(D, D) \leftrightarrow [V(D) \wedge T(D, Pu) \wedge P(D)]'$

6. Ovatko seuraavat lauseet tosia vai epätosia? a) $\forall x[x \geq -x]$, $U = \mathbb{R}$. b) $\exists x[2x = 3x]$, $U = \mathbb{Z}$ c) $\forall x[(x \in \mathbb{Z}) \rightarrow ((x+2) \in \mathbb{Z})]$,$U = \mathbb{R}$. d) $\forall x[(x \in \mathbb{Z}) \rightarrow (\frac{x}{2} \in \mathbb{Z})]$,$U = \mathbb{R}$.

   Ratk. a) $-1 \geq 1$ on epätosi, joten lause epätosi. **b)** $2 \cdot 0 = 3 \cdot 0$, joten lause on tosi

   c) Jos x on kokonaisluku, niin myös $x + 2$ on kokonaisluku, eli lause on tosi.

   d) 1 on kokonaisluku, mutta $\frac{1}{2}$ ei ole. Lause on epätosi.

7. Mitä seuraavat lauseet tarkoittavat, kun perusjoukko $U = \mathbb{R}$? Määrää lauseiden totuusarvo.

   a) $\forall x[(x^2 + 1)^2 \geq 1]$, b)$\forall x \forall y[(xy)^2 \geq 1]$ c) $\exists y \forall x[(x = 0) \vee (xy = x)]$ d) $(\exists x[(x \in \mathbb{Z}) \rightarrow (5x \notin \mathbb{N})])'$

   Ratk. a) "Kaikilla reaaliluvuilla x on $(x^2 + 1)^2 \geq 1$".

   Lause on tosi, sillä koska $x^2 \geq 0$ kaikilla reaaliluvuilla x, niin $x^2 + 1 \geq 1$ kaikilla reaaliluvuilla x, joten myös $(x^2 + 1)^2 \geq 1$ kaikilla reaaliluvuilla x.

   b) "Jokaisen reaalilukuparin x, y tulon neliö on ≥ 1."Lause on epätosi, sillä $0 \cdot 0 = 0 < 1$.

   c) "On olemassa sellainen reaaliluku y, että kaikille reaaliluvuille x on voimassa: $x = 0$ tai $xy = x$". Lause on tosi. Valitaan $y = 1$. Jos reaaliluku $x \neq 0$, niin $x \cdot 1 = x$, eli lause on tosi. Jos luku $x = 0$, niin lause on myös tosi.

   d) "Ei ole totta että on olemassa sellainen kokonaisluku x että $5x$ ei ole luonnollinen luku". Mukataan vähän lausetta:

   $$\begin{aligned}(\exists x[(x \in \mathbb{Z}) \rightarrow (5x \notin \mathbb{N})])' &\equiv \forall x[(x \in \mathbb{Z}) \rightarrow (5x \notin \mathbb{N})]' \equiv \forall x[(x \in \mathbb{Z})' \vee (5x \notin \mathbb{N})]' \\ &\equiv \forall x[(x \in \mathbb{Z}) \wedge (5x \notin \mathbb{N})'] \equiv \forall x[(x \in \mathbb{Z}) \wedge (5x \in \mathbb{N})]\end{aligned}$$

   Jos valitaan $x = -1$, niin $-1 \in \mathbb{Z}$, mutta $5 \cdot (-1) = -5 \notin \mathbb{N}$. Siis viimeinen lause ja siten myös alkuperäinen lause on epätosi.

8. Olkoot $P(x, y)$ kaksipaikkainen predikaatti. Onko $(\forall x P(x, x)) \rightarrow (\forall x \forall y P(x, y))$ validi lause? Perustele vastauksesi.

   Ratk. Valitaan perusjoukko $U = \mathbb{R}$ ja predikaatti $P(x, y)$: "$x = y$". Nyt x=x jokaisella reaaliluvulla x, joten $\forall x P(x, x)$ on tosi. $1 \neq 2$, joten $P(1, 2)$ on epätosi, joten $\forall x \forall y P(x, y)$ on epätosi.

   Siis tällä tulkinnalla lause $(\forall x P(x, x)) \rightarrow (\forall x \forall y P(x, y))$ on epätosi, joten se ei ole validi lause.

9. Kirjoita seuraava predikaattilogiikan lause disjunktiiviseen ja konjunktiiviseen Prenex normaalimuotoon.

   $\{\forall x[P(x) \vee Q(x)]\} \rightarrow \{[\forall x P(x)] \vee \forall x Q(x)\}$.

   Ratk.DPNF-muoto:

   $\{\forall x[P(x) \vee Q(x)]\} \rightarrow \{[\forall x P(x)] \vee [\forall x Q(x)]\}$

   $\equiv \{\forall x[P(x) \vee Q(x)]\} \rightarrow \{[\forall y P(y)] \vee [\forall z Q(z)]\}$

   $\equiv \{\forall x[P(x) \vee Q(x)]\}' \vee \{[\forall y P(y)] \vee [\forall z Q(z)]\}$

   $\equiv \{\exists x[P'(x) \wedge Q'(x)]\} \vee \{[\forall y P(y)] \vee [\forall z Q(z)]\}$

   $\equiv \exists x\{[P'(x) \wedge Q'(x)] \vee \{\forall y[\forall z(P(y) \vee Q(z))]\}\}$

$\equiv \exists x \forall y \{[P'(x) \wedge Q'(x)] \vee \{[\forall z (P(y) \vee Q(z))]\}\}$

$\equiv \exists x \forall y \forall z \{[P'(x) \wedge Q'(x)] \vee [P(y)] \vee [Q(z)]\}.$

CPNF-muoto:

$\{\forall x [P(x) \vee Q(x)]\} \rightarrow \{[\forall x P(x)] \vee \forall x Q(x)\}$

$\overset{\text{kuten edellä}}{\equiv} \exists x \forall y \forall z \{[P'(x) \wedge Q'(x)] \vee [P(y) \vee Q(z)]\}$

$\equiv \exists x \forall y \forall z \{[P'(x) \vee P(y) \vee Q(z)] \wedge [Q'(x) \vee P(y) \vee Q(z)]\}.$