

# TIETOTEKNIIKAN MATEMATIIKKA

## Harjoitus 1 syksy 2019 Ratkaisuja

7. Olkoot  $A$  ja  $B$  alkeislauseita, joille lause  $(A \rightarrow B)' \rightarrow A'$  on epätosi. Määrä lauseiden a)  $B \leftrightarrow A$  b)  $B \rightarrow A'$  c)  $B \rightarrow [(A \vee C) \wedge D'] \rightarrow (C' \vee B')$  totuusarvo.

**Ratk.** Nyt  $(A \rightarrow B)' \rightarrow A' = (A \rightarrow B) \vee A' = (A' \vee B) \vee A' = A' \vee B$ . Koska lause  $(A \wedge B') \rightarrow A'$  on epätosi, on myös lause  $A' \vee B$  epätosi. Siis  $A$  on tosi ja  $B$  on epätosi.

a) Koska lauseilla  $A$  ja  $B$  on eri totuusarvo, niin lause  $B \leftrightarrow A$  on epätosi.

b ja c) Koska  $B$  on epätosi, niin mikä tahansa lause muotoa  $B \rightarrow C$  on tosi. Siis kohtien b) ja c) lauseet ovat tosia.

8. Muodosta yhdistetty lause, joka on epätosi, kun ainakin kaksi alkeislauseista  $A$ ,  $B$ , ja  $C$  on epätosia, ja tosi muulloin, ja joka sisältää vain toimituksia  $'$ ,  $\wedge$  ja  $\vee$ .

**Ratk.** Useita oikeita ratkaisuja. Eräs:  $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$

9. Tien risteyksessä istuskelee kaksi miestä. Toinen miehistä on Rehti-Risto, joka puhuu aina totta ja toinen on Retku-Reino joka aina valehtelee. Olet eksynyt, etkä tiedä onko kaupunki oikealle vai vasemmalle menevän tien suunnassa, vievätkö molemmat tiet kaupunkiin vai eikö kumpikaan tie vie kaupunkiin. Et myöskään tiedä, kumpi miehistä on Rehti-Risto ja kumpi Retku-Reino. Kysyessäsi heiltä miten kaupunkiin pääsee, ensimmäinen vastaa "Vasemmanpuoleinen tie vie kaupunkiin ja oikeanpuoleinen ei". Toisen vastaus on "Toinen tie vie kaupunkiin ja toinen ei". Kumpaa tietä lähdet kulkemaan päästäksesi kaupunkiin vai käännytkö takaisin?

**Ratk. ...**

10. Määrä DNF ja CNF muoto seuraaville lauselogiikan lauseille:

a)  $(A \rightarrow B) \leftrightarrow C$

b)  $((A \wedge B) \rightarrow (C \vee D)) \wedge (F \vee G)'$

**Ratk.** a) DNF muoto:

$$\begin{aligned}(A \rightarrow B) \leftrightarrow C &= (A' \vee B) \leftrightarrow C = [(A' \vee B) \rightarrow C] \wedge [C \rightarrow (A' \vee B)] \\ &= [(A' \vee B)' \vee C] \wedge [C' \vee (A' \vee B)] = [(A \wedge B') \vee C] \wedge [C' \vee (A' \vee B)] \\ &= [(A \wedge B') \wedge (C' \vee (A' \vee B))] \vee [C \wedge (C' \vee (A' \vee B))] \\ &= (A \wedge B' \wedge C') \vee \overbrace{[(A \wedge B') \wedge (A' \vee B)]}^{\text{aina epätosi}} \vee \overbrace{[C \wedge C']}_{\text{aina epätosi}} \vee (C \wedge (A' \vee B)) \\ &= (A \wedge B' \wedge C') \vee 0 \vee 0 \vee (C \wedge A') \vee (C \wedge B) \\ &= (A \wedge B' \wedge C') \vee (C \wedge A') \vee (C \wedge B)\end{aligned}$$

CNF muoto:  $(A \rightarrow B) \leftrightarrow C = (A' \vee B) \leftrightarrow C = \dots = (A \vee C) \wedge (C \vee B') \wedge (B \vee A' \vee C')$

b) DNF muoto:  $((A \wedge B) \rightarrow (C \vee D)) \wedge (F \vee G)' = \dots = (F' \wedge G' \wedge C) \vee (F' \wedge G' \wedge D) \vee (F' \wedge G')$

CNF muoto:  $[(A \wedge B) \rightarrow (C \vee D)] \wedge (F \vee G)' = [(A \wedge B)' \vee (C \vee D)] \wedge (F' \wedge G')$

$= (A' \vee B' \vee C \vee D) \wedge F' \wedge G'$

11. Osoita, että  $\{A \rightarrow B, A' \rightarrow C, C \rightarrow D, B'\} \models D$  käyttämällä ainoana päättelysääntönä Modus Ponensia.

<b>Ratk.</b>	1. $A \rightarrow B$	Oletus
	2. $(A \rightarrow B) \rightarrow (B' \rightarrow A')$	Tautologia
	3. $B' \rightarrow A'$	MP 1 ja 2
	4. $B'$	Oletus
	5. $A'$	MP 3 ja 4
	6. $A' \rightarrow C$	Oletus
	7. $C$	MP 5 ja 6
	8. $C \rightarrow D$	Oletus
	9. $D$	MP 7 ja 8

12. Osoita, että  $\{A' \rightarrow C, C \rightarrow F, G'\} \models ((F \rightarrow G) \rightarrow A)$ .

**Ratk.** Osoitetaan, että  $\{A' \rightarrow C, C \rightarrow F, G', F \rightarrow G, A'\} \models 0$ .

1.  $A'$  Oletus
2.  $A' \rightarrow C$  Oletus
3.  $C$  ModusPonens 1 ja 2
4.  $C \rightarrow F$  Oletus
5.  $F$  ModusPonens 3 ja 4
6.  $F \rightarrow G$  Oletus
7.  $G$  ModusPonens 5 ja 6
8.  $G'$  Oletus
9.  $G \wedge G'$  Konjunktio 7 ja 8
10.  $0$  Tautologia  $(P \wedge P') \leftrightarrow 0$  ja 9

**Sama resoluution avulla:**

**Vastaava päättely:**  $\{A' \rightarrow C, C \rightarrow F, G', ((F \rightarrow G) \rightarrow A)'\} \models 0$ .

**Konjunktit:**  $A' \rightarrow C = A \vee C = C_1$

$C \rightarrow F = C' \vee F = C_2$

$G' = C_3$

$((F \rightarrow G) \rightarrow A)' = ((F' \vee G) \rightarrow A)' = ((F' \vee G)' \vee A)' = (F' \vee G) \wedge A'$  eli  $F' \vee G = C_4$  ja  $A' = C_5$ .

Vastaava päättely:  $\{C_1, C_2, \dots, C_5\} \models 0$

$C_1$  ja  $C_5$ :  $C = C_6$ .

$C_2$  ja  $C_6$ :  $F = C_7$

$C_7$  ja  $C_4$ :  $G = C_8$

$C_3$  ja  $C_8$ :  $0$

Resoluutiomenettely pysähtyy, koska  $0$  saatiin pääteltyä.

Silloin  $\{C_1, C_2, \dots, C_5\} \models 0$ , eli myös

$\{A' \rightarrow C, C \rightarrow F, G'\} \models ((F \rightarrow G) \rightarrow A)$ .