031023P Tietotekniikan matematiikka

1. välikoe 1.10.2018 Ratkaisuja

1. **a)** Muodosta yhdistetty lause, joka on epätosi, kun ainakin kaksi alkeislauseista A, B, ja C on epätosia, ja tosi muulloin, ja joka sisältää vain toimituksia $'$, $\wedge$ ja $\vee$. (3p)

   b) Tutki resoluutiomenettelyllä, onko voimassa $\{(B \to C')', F, ((B \wedge C) \to A) \wedge (C \vee D' \vee F')\} \vDash A$. Merkitse tarkasti näkyviin resoluutiomenettelyn eri vaiheet. (3p)

   Ratk. a) Useita oikeita ratkaisuja. Eräs: $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$ **3p**

   b) Vastaava päättely: $\{(B \to C')', F, ((B \wedge C) \to A) \wedge (C \vee D' \vee F'), A'\} \vDash 0$ **1p**

   Konjunktit: $(B \to C')' = (B' \vee C')' = B \wedge C$, $C_1 = B, C_2 = C$.

   $F = C_3$

   $((B \wedge C) \to A) \wedge (C \vee D' \vee F') = (B' \vee C' \vee A) \wedge (C \vee D' \vee F')$, $C_4 = B' \vee C' \vee A$ ja $C_5 = C \vee D' \vee F'$, $A' = C_6$.

   Vastaava päättely: $\{C_1, C_2, \ldots, C_6\} \vDash 0$ **1p**

   C_1 ja C_4: $C' \vee A = C_7$.

   C_6 ja C_7: $C' = C_8$.

   C_2 ja C_8: 0.

   Resoluutiomenettely pysähtyy, koska 0 saatiin pääteltyä.

   Silloin $\{C_1, C_2, \ldots, C_6\} \vDash 0$, eli myös

   $\{(B \to C')', F, ((B \wedge C) \to A) \wedge (C \vee D' \vee F'), A'\} \vDash 0$ ja siis

   $\{(B \to C')', F, ((B \wedge C) \to A) \wedge (C \vee D' \vee F')\} \vDash A$. **1p**

2. **a)** 2-järjestelmän luvut ovat suuruusjärjestyksessä 0 ja 1 ja vastaavasti 16-järjestelmän luvut ovat $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F$. Luku $X = (7AD)_{16}$ ja luku $Y = (BC)_{16}$. Lausu luvut X ja Y 2-järjestelmässä. Käytä alla olevaa muunnostaulukkoa. Laske sen jälkeen erotus $Y - X$ käyttäen vähennyslaskua ilman lainaamista. Laskut on tehtävä 2-järjestelmässä. Kaikki laskut on esitettävä.(3p)

Heksaluvut	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
Binääriluvut	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

   b) Olkoon perusjoukkona U kaikki maailman ihmiset. Käytetään seuraavia predikaatteja:

   $J(x) =$ "x on puolueen puheenjohtaja", $PM(x) =$ "x haluaa pääministeriksi.", $Nat(x) =$ "x on Svea-liberaalien jäsen.", $S(x, y) =$ "x tekee sopimuksen y:n kanssa", ja seuraavaa alkiota perusjoukosta Å: "Jimmy Å". Kirjoita lauseet b1)-b3) merkkimuotoon (1p kukin).

   b1) "Jokainen pääministeriksi haluava puolueen puheenjohtaja ei tee sopimusta Jimmy Å:n kanssa."

   b2) "Jos Jimmy Å on puolueen puheenjohtaja, niin ainakin yksi pääministeriksi haluava on Svea-liberaalien jäsen."

   b3) "Ei ole totta, että jokainen pääministeriksi haluava joutuu tekemään sopimuksen jokaisen Svea-liberaalien jäsenen kanssa."

   Ratk. Nyt $X = (7AD)_{16} = (0111\ 1010\ 1101)_2$ ja $Y = (BC)_{16} = (1011\ 1100)_2$ **(1p)**

   $Y - X = 0111\ 1010\ 1101 - 0000\ 1011\ 1100 = 0111\ 1010\ 1101 + (1\ 0000\ 0000\ 0000 - 0111\ 1010\ 1101) - 1\ 0000\ 0000\ 0000 = 0111\ 1010\ 1101 + X^{**} - 1\ 0000\ 0000\ 0000$

   $X^* = 1111\ 1111\ 1111 - 0111\ 1010\ 1101 = 1000\ 0101\ 0010$ ja $X^{**} = X^* + 1 = 1000\ 0101\ 0011$

   $Y + X^{**} = 1001\ 0000\ 1111$. Ei ylivuotoa, joten $Y - X < 0$.

   Silloin $Y - X = -(Y + X^{**})^{**} = -(1111\ 1111\ 1111 - 1001\ 0000\ 1111 + 1)$

   $= -(0110\ 1111\ 0000 + 1) = -0110\ 1111\ 0001$ **(2p)**

   b) b1) $\exists x(J(x) \wedge PM(x) \wedge S'(x, \text{Å}))$ tai $[\forall x((J(x) \wedge PM(x)) \to S'(x, \text{Å}))]'$ **1p**

   b2) $J(\text{Å}) \to (\exists x(PM(x) \wedge Nat(x)))$ **1p**

   b3) $[\forall x(PM(x) \to (\forall y(Nat(y) \to S(x, y))))]'$ tai $\exists x \exists y(PM(x) \wedge Nat(y) \wedge S'(x, y))$. **1p**

3. **a)** Tarkastellaan kaksipaikkaista predikaattia $P(x, y)$. Onko lause $(\forall x P(x, x)) \to (\forall x \forall y P(x, y))$ validi lause? Perustele vastauksesi. (2p)

   b) Vanhassa lasten pelissä kaksi pelaajaa valitsee kumpikin yhtäaikaa sovituin käsimerkin joko sakset, kiven tai paperin. Häviäjä saadaan selville seuraavien tietojen perusteella:

- kivi häviää paperille (paperi peittää kiven)
- sakset häviävät kivelle (kivi tylsyttää sakset)
- paperi häviää saksille (sakset leikkaavat paperia)

Jos pelaajat valitsivat saman esineen, niin kumpikaan ei hävinnyt.

Määritellään joukon $A = \{\text{sakset}, \text{kivi}, \text{paperi}\}$ suhde R seuraavasti:

$$(X, Y) \in R \text{ täsmälleen silloin kun } X \text{ei häviä } Y\text{:lle.}$$

Onko suhde R refleksiivinen, symmetrinen, antisymmetrinen ja/tai transitiivinen ? Perustele vastauksesi (1p kukin).

Ratk. a) Valitaan perusjoukko $U = \mathbb{R}$ ja predikaatti $P(x, y)$: "$x = y$". Nyt x=x jokaisella reaaliluvulla x, joten $\forall x P(x, x)$ on tosi. $1 \neq 2$, joten $P(1, 2)$ on epätosi, joten $\forall x \forall y P(x, y)$ on epätosi.

Siis tällä tulkinnalla lause $(\forall x P(x, x)) \to (\forall x \forall y P(x, y))$ on epätosi, joten se ei ole validi lause. **2p**

b) Merkitään S = Sakset, P = Paperi ja K = Kivi. Silloin $A = \{S, P, K\}$ ja suhde

$R = \{(S, S), (P, P), (K, K), (S, P), (P, K), (K, S)\}$.

$(S, S), (P, P), (K, K) \in R$, joten R on refleksiivinen. **1p**

$(S, P) \in R$ ja $(P, S) \notin R$, joten R ei ole symmetrinen **1p**

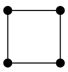
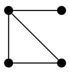
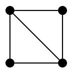
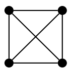
$(S, P) \in R$ ja $(P, S) \notin R$, $(P, K), \in R$ ja $(K, P) \notin R$ ja $(K, S) \in R$ ja $(S, K) \notin R$, joten R on antisymmetrinen. **1p**

$(S, P) \in R$, $(P, K) \in R$ ja $(S, K) \notin R$, joten R ei ole transitiivinen. **1p**

4. **a)** Piirrä kaikki täsmälleen 4 pistettä ja ainakin 4 viivaa sisältävät ei-isomorfiset graafit. (2p)

b) Osoita, että vähintään 15 opiskelijan joukko voidaan aina jakaa ryhmiin, joissa jokaisessa on 4 tai 5 opiskelijaa. (4p)

Ratk.a)

4 viivaa:  ja  **5 viivaa:**  **6 viivaa:**  **2p**

b) Matemaattinen induktio opiskelijoiden määrän suhteen.

$P(n)$: "$n = 4p + 5q$ joillakin kokonaisluvuilla p ja q "

Väite: $P(n)$ on voimassa aina kun $n = 15, 16, \ldots$.

$15 = 4 \cdot 0 + 5 \cdot 3$, joten $P(15)$ on voimassa. **1p**

Induktio-oletus: $P(i)$ on voimassa aina kun $i = 15, 16, 17 \ldots, k$.

Induktioväite: $P(k + 1)$ on voimassa.

Induktioväitteen todistus: Nyt $k + 1 = (k - 3) + 4$.

(1) Jos $k - 3 \geq 15$, niin induktio-oletuksen perusteella $k - 3 = 4p + 5q$ joillakin kokonaisluvuilla p ja q. Silloin $k + 1 = (k - 3) + 4 = 4p + 5q + 4 = 4(p + 1) + 5q$ eli Induktioväite on voimassa. **2p**

(2) Jos $k - 3 \leq 14$, niin koska $k + 1 \geq 15$, on $k - 3 \geq 12$. Nyt $12 = 4 \cdot 3 + 5 \cdot 0$, $13 = 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1$, $14 = 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2$, joten $k - 3 = 4 \cdot p + 5 \cdot q$, joillakin kokonaisluvuilla p ja q aina kun $12 \leq k - 3 \leq 14$. Samalla tavalla kuin kohdassa (1) voidaan osoittaa, että $P(k + 1)$ on voimassa myös tässä tapauksessa.

Kohtien (1) ja (2) perusteella Induktioväite on voimassa, eli Väite on voimassa. **1p**