031023P Tietotekniikan matematiikka

1. välikoe 2.10.2017

1. **a)** Määritellään toimitus | oheisella totuustaululla. Määrää lauseen $A|B$ kanssa yhtäpitävä lause, missä on käytetty vain toimituksia $\rightarrow$ ja $'$. Osoita lauseen $A|B$ ja keksimäsi lauseen yhtäpitävyys totuustaulujen avulla. (3p)

A	B	A | B
T	T	T
T	E	T
E	T	T
E	E	E

b) Tutki resoluutiomenettelyllä, onko voimassa

$$\{(A \rightarrow B) \wedge (C' \rightarrow B'), (C \wedge A)'\} \models A'$$

Merkitse tarkasti näkyviin resoluutiomenettelyn eri vaiheet. (3p)

Ratk. a) Selvästi $A|B = A \vee B = A' \rightarrow B$. **(1p)**

Totuustaulu:

A	B	A | B	A'	$A' \rightarrow B$
T	T	T	E	T
T	E	T	E	T
E	T	T	T	T
E	E	E	T	E

(2p)

b) Vastaava päättely:

$$\{(A \rightarrow B) \wedge (C' \rightarrow B'), (C \wedge A)', A\} \models 0$$

Nyt

$(A \rightarrow B) \wedge (C' \rightarrow B') = (A' \vee B) \wedge (C \vee B')$. Silloin $C_1 = A' \vee B$ ja $C_2 = C \vee B'$.

$(C \wedge A)' = C' \vee A' = C_3$.

$A = C_4$. **(1p)**

Vastaava päättely: $\{C_1, C_2, C_3, C_4\} \models 0$.

Resoluutiosäännöllä: C_3 ja C_4 saadaan $C' = C_5$

C_2 ja C_5 saadaan $B' = C_6$

C_4 ja C_1 saadaan $B = C_7$

C_6 ja C_7 saadaan 0.

Siis $\{C_1, C_2, C_3, C_4\} \models 0$, eli

$\{(A \rightarrow B) \wedge (C' \rightarrow B'), (C \wedge A)', A\} \models 0$

eli $\{(A \rightarrow B) \wedge (C' \rightarrow B'), (C \wedge A)'\} \models A'$. **(2p)**

2. **a)** 2-järjestelmän luvut ovat suuruusjärjestyksessä 0 ja 1 ja vastaavasti 16-järjestelmän luvut ovat $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F$. Luku $X = (111000111)_2$ ja luku $Y = (1011001)_2$. Lausu luvut X ja Y 16-järjestelmässä. Käytä alla olevaa muunnostaulukkoa. Laske sen jälkeen erotus $X - Y$ käyttäen vähennyslaskua ilman lainaamista. Laskut on tehtävä 16-järjestelmässä. Kaikki laskut on esitettävä. (3p)

Heksaluvut	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
Binääriluvut	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

b) Olkoon perusjoukkona U kaikki maailman ihmiset. Käytetään seuraavia predikaatteja:

$K(x) =$ "x on kansanedustaja",

$O(x) =$ "x kannattaa 4-juoman myyntiä ruokakaupassa.",

$P(x) =$ "x pelkää putoamista seuraavissa vaaleissa."

$\ddot{A}(x) =$ "x on äänestäjä."

$T(x, y) =$ "x tuntee y:n",

ja seuraavaa alkiota perusjoukosta S: "Säpilä".

Kirjoita lauseet b1)-b3) merkkimuotoon (1p kukin).

b1) Ainakin yksi seuraavissa vaaleissa putoamista pelkäävä kansanedustaja ei kannata 4-juoman myyntiä ruokakaupassa.

b2) Jokainen seuraavissa vaaleissa putoamista pelkäävä kansanedustaja, joka tuntee ainakin yhden äänestäjän, kannattaa 4-juoman myymistä ruokakaupassa.

b3) Jos Säpilä tuntee jokaisen äänestäjän, niin hän kannattaa 4-juoman myymistä ruokakaupassa.

Ratk. Nyt $X = (0001\ 1100\ 0111)_2 = (1C7)_{16}$ ja $Y = (0101\ 1001)_2 = (59)_{16}$ **(1p)**

$X - Y = 1C7 - 059 = 1C7 + (FFF - 059 + 1) - 1000 = 1C7 + (Y^* + 1) - 1000 = 1C7 + Y^{**} - 1000.$

$Y^* = FFF - 059 = FA6$ ja $Y^{**} = Y^* + 1 = FA7$. $X + Y^{**} = 116E$. Summassa ylivuoto, joten $X + Y = 16E$. **(2p)**

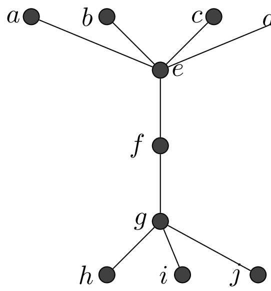
b) b1) $\exists x(K(x) \wedge P(x) \wedge O'(x))$ **b2)** $\forall x[[P(x) \wedge K(x) \wedge (\exists y(\text{Ä}(y) \wedge T(x,y))] \rightarrow O(x)]$

b3) $[\forall x(\text{Ä}(x) \rightarrow T(S,x))] \rightarrow O(S)$.

3. **a)** Määrää vähintään 10 alkiota sisältävä joukko A ja joukon A sellainen osittainjärjestys $\preceq$, että järjestyksellä $\preceq$ on joukossa A täsmälleen 3 minimaalista ja täsmälleen 4 maksimaalista alkiota. Piirrä määrittelemäsi osittainjärjestyksen $\preceq$ järjestyskuvio ja merkitse siihen kaikki minimaaliset ja maksimaaliset alkiot. (3p)

b) Piirrä **b1)** graafi $C_5 \times P_2$ **b2)** graafi $K_{2,3} + K_2$ **b3)** 5 pistettä sisältävä graafi, jossa on täsmälleen 2 komponenttia. (1p kukin)

Ratk. a) Useita ratkaisuja. Esimerkiksi $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$.

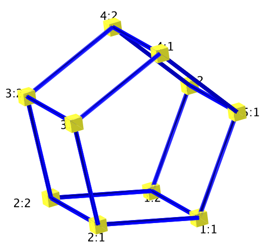
Järjestyskuvio: 

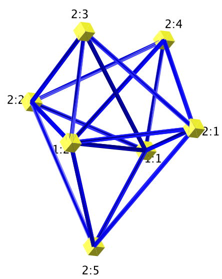
(1p)

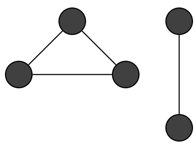
Maksimaaliset alkiot: a, b, c, d

Minimaaliset alkiot: h, i, j. **(2p)**

b1) $C_5 \times P_2$ **b2)** $K_{2,3} + K_2$





b3): 

4. **a)** Piirrä kaikki 5 pistettä ja 4 viivaa sisältävät ei-isomorfiset graafit. (2p)

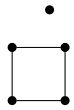
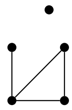
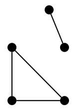
b) Hyperkuutio Q_n määritellään rekursiivisesti seuraavasti:

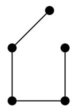
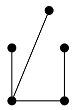
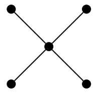
(i) $Q_1 = K_2$ (ii) $Q_n = K_2 \times Q_{n-1}$ aina kun $n = 2, 3, \ldots$.

Graafin avulla voidaan esittää n:n pituiset bittijonot, jos graafin pisteet voidaan nimetä niin, että jokainen n:n pituinen bittijono on täsmälleen yhden pisteen nimi ja kaksi pistettä ovat vieruspisteitä täsmälleen silloin kun pisteiden nimet eroavat täsmälleen yhden bitin verran. **b1)** Esitä 3:n pituiset bittijonot Q_3:sen avulla.(1p) **b2)** Osoita tulos:

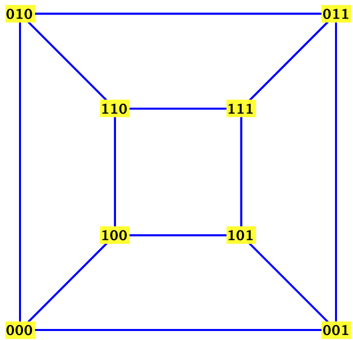
n:n pituiset bittijonot voidaan esittää hyperkuution Q_n avulla aina kun $n = 1, 2, \ldots$. (3p)

Ratk. a)

Epäyhtenäiset:   **ja** 

Yhtenäiset:   **ja** 

b1)



b2) Väite: Q_n:n pisteet voidaan nimetä n:n pituisella bittijonolla niin, että jokainen bittijono on täsmälleen yhden pisteen nimi ja kaksi pistettä ovat vieruspisteitä täsmälleen silloin kun niiden nimet eroavat täsmälleen yhden bitin verran.

Tod. Matemaattinen induktio n:n suhteen

Merkitään $P(n)$: "Q_n:n pisteet voidaan nimetä n:n pituisella bittijonolla niin, että jokainen bittijono on täsmälleen yhden pisteen nimi ja kaksi pistettä ovat vieruspisteitä täsmälleen silloin kun niiden nimet eroavat täsmälleen yhden bitin verran".

Nyt $Q_1 = K_2$, joten vaadittu pisteiden nimitys saadaan, kun toinen merkitään 0:lla ja toinen 1:llä. Siis $P(1)$ on voimassa.

Induktio-oletus: $P(k)$ on voimassa

Induktioväite: $P(k+1)$ on voimassa.

Induktioväitteen todistus. **(1p)**

Olkoon pistettä u vastaava bittijono u_k.

Graafissa Q_{k+1} esiintyy kaksi Q_k:n kopiota Q_k^0 ja Q_k^1.

Nimetään pisteet seuraavasti:

Q_k^0:ssa u merkitään bittijonolla $0u_k$ ja graafissa Q_k^1 piste u merkitään bittijonolla $1u_k$. Saadaan ehdot täyttävät Q_{k+1}:n pisteiden nimeäminen eli $P(k+1)$ on voimassa.

Induktioperiaatteen perusteella $P(n)$ on voimassa kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Siis Väite on voimassa. **(2p)**

Kaavoja:

Modus Ponens	$\{P, P \to Q\} \vDash P$	$[P \wedge (P \to Q)] \to P$
Modus Tollens	$\{P \to Q, Q'\} \vDash P'$	$[(P \to Q) \wedge Q'] \to P'$
Konjunktio	$\{P, Q\} \vDash P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \to (P \wedge Q)$
Yksinkertaistus	$\{P \wedge Q\} \vDash P, Q$	$[(P \wedge Q) \to P] \wedge [(P \wedge Q) \to Q]$
Additio	$P \vDash P \vee Q$	$P \to (P \vee Q)$
Ketjusääntö	$\{P \to Q, Q \to W\} \vDash P \to W$	$[(P \to Q) \wedge (Q \to W)] \to (P \to W)$
Disjunktiivinen syllogismi	$\{P \vee Q, P'\} \vDash Q$	$[(P \vee Q) \wedge P'] \to Q$