031023P Tietotekniikan matematiikka

1. välikoe 26.9.2016 Ratkaisut

1. **a)** Oheisena on lauseen $A \circ B$ totuustaulu. Keksi lauseen $A \circ B$ kanssa yhtäpitävä lause, missä on käytetty vain toimituksia $'$ ja $\vee$ ja osoita lauseen $A \circ B$ ja keksimäsi lauseen yhtäpitävyys totuustaulujen avulla.(3p)

A	B	A∘B
T	T	E
T	E	T
E	T	E
E	E	E

b) Tutki resoluutiomenettelyllä, onko voimassa

$$\{A \to (B \to C), A \vee D, (E \vee D) \to B\} \models (C' \to E')$$

Perustele vastauksesi. Merkitse tarkasti näkyviin resoluutiomenettelyn eri vaiheet.(3p)

Ratk. a) Nyt $A \circ B = (A \to B)' = (A' \vee B)'$. **(2p)**

A	B	A∘B	A'	$A' \vee B$	$(A' \vee B)'$
T	T	E	E	T	E
T	E	T	E	E	T
E	T	E	T	T	E
E	E	E	T	T	E

(1p)

b) Vastaava päättely:

$$\{A \to (B \to C), A \vee D, (E \vee D) \to B, (C' \to E')'\} \models 0 \qquad \textbf{(1p)}$$

Nyt $A \to (B \to C) = A' \vee B' \vee C = C_1$.

$A \vee D = C_2$,

$(E \vee D) \to B = (E \vee D)' \vee B) = (E' \wedge D') \vee B = (E' \vee B) \wedge (D' \vee B)$, eli $E' \vee B = C_3$ ja $D' \vee B = C_4$.

$(C' \to E')' = (C \vee E')' = C' \wedge E$, eli $C' = C_5$ ja $E = C_6$.

Vastaava päättely $\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\} \models 0$

Resoluutiosääntöä soveltamalla:

C_3 ja C_6: $B = C_7$.

C_7 ja C_1: $A' \vee C = C_8$.

C_8 ja C_5: $A' = C_9$.

C_9 ja C_2: $D = C_{10}$.

C_5 ja C_1: $A' \vee B = C_{11}$.

C_{11} ja C_2: $B \vee D = C_{12}$.

Ei muita.

Resoluutiomenettely pysähtyy, eikä 0:aa saatu pääteltyä. Siis

$\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\} \not\models 0$, eli $\{A \to (B \to C), A \vee D, (E \vee D) \to B\} \not\models (C' \to E')$ **(2p)**

2. **a)** Kun 2-järjestelmän luvut ovat suuruusjärjestyksessä 0,1,ja luku $X = (100011)_2$ ja $Y = (01110011)_2$, niin laske erotus $X - Y$ käyttäen vähennyslaskua ilman lainaamista. Laskut on tehtävä 2-järjestelmässä. Kaikki laskut on esitettävä. Ratkaisu, jossa lasketaan ensin $Y - X$ ja senjälkeen sijoitetaan - merkki eteen antaa 0 pistettä. (3p)

b) Olkoon perusjoukkona U kaikki maailman ihmiset. Käytetään seuraavia predikaatteja:

$E(x) =$ "x on ehdokas",

$L(x) =$ "x on luotettava.",

$V(x, y) =$ "x äänestää y:tä",

ja seuraavia alkioita perusjoukosta D: "Aku"ja H: ”Hillevi”.

Kirjoita lauseet b1)-b3) merkkimuotoon (1p kukin).

b1) Aku äänestää Hilleviä täsmälleen silloin kun Aku ei äänestä itseään.

b2) Jokaista luotettavaa ehdokasta äänestetään.

b3) Ei ole totta, että jokainen Akua äänestävä ehdokas on luotettava.

Ratk. a) Luvut binäärilukuja: $Y = 01110011$,$X = 00100011$, $Y^* = 11111111 - 01110011 = 10001100$, $Y^{**} = Y^* + 1 = 10001100 + 1 = 10001101$

$X + Y^{**} = 00100011 + 10001101 = 10110000$. Ei ylivuotoa, joten $X - Y$ on negatiivinen. **(1p)**

$X - Y = X + Y^{**} - 100000000 = -(100000000 - (X + Y^{**})) = -(11111111 - (X + Y^{**}) + 1) = -((X + Y^{**})^* + 1) = -(X + Y^{**})^{**}$

Nyt $(X + Y^{**})^* = 11111111 - 10110000 = 01001111$ ja $(X + Y^{**})^{**} = 01001111 + 1 = 01010000$.

Siis $X - Y = -01010000$. **(2p)**

b) b1) $V(D, H) \leftrightarrow (V(D, D)'$ b2) $\forall x[(E(x) \wedge L(x)) \rightarrow (\exists y V(y, x))]$

b3) $\{\forall x[(V(x, D) \wedge E(x)) \rightarrow L(x)]\}'$ tai $\exists x[V(x, D) \wedge E(x) \wedge L(x)']$

3. **a)** Olkoon joukko $A = \{a, b, c\}$. Määrää A:n kaikkien osajoukkojen muodostama joukko $\mathcal{P}(A)$. (1p) Joukoille X ja Y on voimassa $X \subseteq Y$, täsmälleen silloin kun joukko X on joukon Y osajoukko. Onko suhde $\subseteq$ osittainen järjestys joukossa $\mathcal{P}(A)$? Jos on, niin muodosta suhteen järjestyskuva joukossa $\mathcal{P}(A)$. Jos ei ole, niin perustele miksi ei.(2p)

   b) Piirrä yksi graafi, joka toteuttaa **kaikki** seuraavat ehdot:

   (1) Graafissa on täsmälleen 3 komponenttia ja korkeintaan 11 pistettä.

   (2) Graafi sisältää täsmälleen kaksi pistettä joiden aste on 1.

   (3) Graafi sisältää aligraafinaan täydellisen graafin K_5. (2p)

   Määrää piirtämäsi graafin (piirrä erilleen) yhtenäinen indusoitu aligraafi jossa on täsmälleen 4 pistettä. (1p)

   Ratk. Vrt. Harjoitus 5 tehtävä 7

4. Lucasin luvut määritellään seuraavasti: $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ ja $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ aina kun $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$. Määrää lukujonon 5 ensimmäistä jäsentä. Osoita, että aina kun n on ei-negatiivinen kokonaisluku, niin

$$L_0 + L_1 + \cdots + L_n = L_{n+2} - 1.$$

Ratk.

$$\begin{array}{lllll} L_2 & = & L_1 + L_0 & = & 2 + 1 = 3 \\ L_3 & = & L_2 + L_1 & = & 3 + 1 = 4 \\ L_4 & = & L_3 + L_2 & = & 4 + 3 = 7 \\ L_5 & = & L_4 + L_3 & = & 7 + 4 = 11 \end{array}$$ **(1p)**

Väite: $L_0 + L_1 + \cdots + L_n = L_{n+2} - 1$ aina kun $n = 0, 1, \ldots$.

Väitteen todistus. Matemaattinen induktio:

Merkitään $P(n)$: "$L_0 + L_1 + \cdots + L_n = L_{n+2} - 1$".

Nyt $L_0 = 2$ ja $L_{0+2} - 1 = L_2 - 1 = 3 - 1 = 2$, joten $P(0)$ on voimassa.**(1p)**

Induktio-oletus: $P(k)$ on voimassa, eli $L_0 + L_1 + \cdots + L_k = L_{k+2} - 1$.

Induktioväite: $P(k + 1)$ on voimassa, eli $L_0 + L_1 + \cdots + L_{k+1} = L_{k+1+2} - 1$.

Induktioväitteen todistus. Nyt

$L_{k+1+2} - 1 = L_{k+3} - 1 = L_{k+2} + L_{k+1} - 1 = (L_{k+2} - 1) + L_{k+1} \overset{ind.ol.}{=} (L_0 + L_1 + \cdots + L_k) + L_{k+1}$,

eli $L_{k+1+2} - 1 = L_0 + L_1 + \cdots + L_{k+1}$.

Induktioväite on voimassa, joten Väite on voimassa.**(4p)**