# 811312A Tietorakenteet ja algoritmit, 23.8.2014

**Tentissä saa olla mukana laskin.**

1. Vastaa seuraaviin kysymyksiin:
   a) Mitä tarkoittaa algoritmin **täydellinen oikeellisuus**? (2p)
   b) Seuraavan algoritmin tulisi palauttaa taulukko, jossa ovat parametrina annettavan taulukon alkiot päinvastaisessa järjestyksessä.

```
Syöte: Taulukko A[1,..,n], n >= 1
Tulostus: Taulukko B, jossa alkiot päinvastaisessa järjestyksessä.

REVERSE(A)
    varaa taulukko B[1..n]
    i = 1
    while i <= n
       B[i] = A[n+1-i]
       i = i+1
    return B
```

   Todista algoritmi oikeaksi (4p).

2. Vastaa seuraaviin kysymyksiin
   a) Mitä tarkoittaa algoritmin **aikakompleksisuus**? (2p)
   b) Mikä on alla olevan vaihtolajittelualgoritmin **kompleksisuusluokka**? Perustele! (4p)

```
Syöte: Taulukko A[1,..,n], n >= 1
Tulostus: Taulukon luvut järjestyksessä A[1] <= ... <= A[n]

VAIHTOLAJITTELU(A)
    for i = 1 to n
       for j = (i+1) to n
          if A[i]>A[j]
             x = A[i]
             A[i] = A[j]
             A[j] = x
    return
```

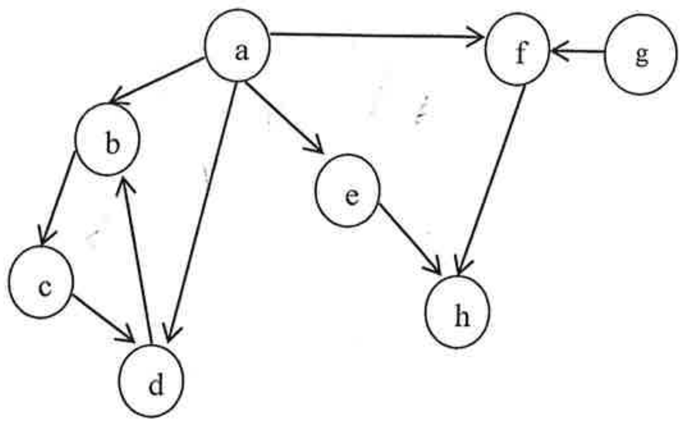
3. Seuraavassa taulukossa ovat kymmenen toiminnon alku- ja loppuajat:

| **Toiminto** | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ | $a_9$ | $a_{10}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Alkuaika** | 5 | 11 | 3 | 10 | 2 | 8 | 8 | 4 | 6 | 9 |
| **Loppuaika** | 8 | 14 | 7 | 15 | 4 | 10 | 13 | 9 | 10 | 13 |

   Esitä algoritmi, jonka avulla voidaan löytää (yleisesti mistä tahansa toimintojen joukosta, kun alku- ja loppuajat tunnetaan) lukumäärältään mahdollisimman suuri joukko toimintoja, jotka eivät mene ajallisesti päällekkäin. (Edellisen toiminnon loppuaika saa olla sama kuin seuraavan alkuaika.) Perustele, miksi algoritmi toimii oikein ja sovella algoritmia taulukon toimintojoukkoon.

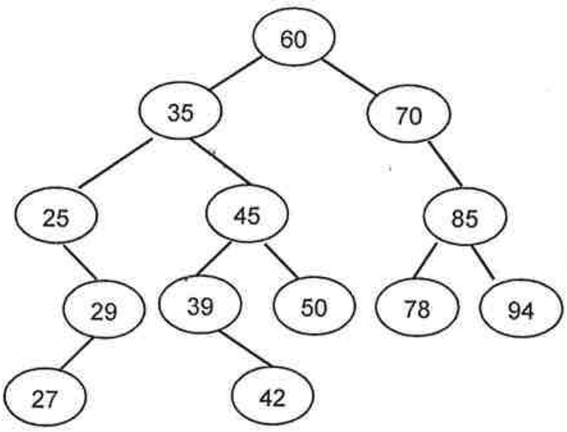
*Jatkuu toisella puolella ->*

4. Suorita **syvyyshaku** seuraavalle suunnatulle verkolle.




Käytä verkolle **vieruslistaesitystä**. Esitä algoritmi vaiheittain ja kirjoita näkyviin kunkin solmun havaitsemisajat ja käsittelyn lopetusajat. Luokittele verkon välit puuväleihin, takautuviin väleihin, eteneviin väleihin ja sivuttaisväleihin. Miten algoritmi havaitsee verkon solmujen b, c ja d muodostaman syklin?

5. Vastaa seuraaviin kysymyksiin (3p kummastakin):
   a) Poista alla olevasta **binäärisestä etsintäpuusta** ensin avain 70 ja sitten avain 35. Esitä operaatiot graafisesti ja kuvaa niiden vaiheet.




   b) Tallenna avaimet 6, 15, 31, 26, 64 ja 37 hashtaulukkoon, jonka koko on 11, kun tiivistefunktio on $f(k) = k(\mathrm{mod}11)$ ja törmäyksien hallintaan käytetään lineaarista luotausta.

*Tentin tulokset julkistetaan viimeistään 15.9.2014*

# Merkintöjä avuksi

## 1. Funktioista

Muotoa $f(x) = a_k \cdot x^k + a_{k-1} \cdot x^{k-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$ oleva funktio on **polynomifunktio.**

Funktio $f(x) = a^x$ on **potenssifunktio.**

**Logaritmifunktio** on potenssifunktion käänteisfunktio, eli $x = a^b \Leftrightarrow \log_a(b) = x$. Luku a on logaritmin **kantaluku.**

Yleisimmin esiintyy 2-kantainen logaritmi (a=2), josta käytetään merkintää lg, siis $\lg(b) = x \Leftrightarrow x = 2^b$ .

**Esimerkki.** lg(8) = 3, koska $2^3=8$. Edelleen lg(128) = 7, koska $2^7=128$ ja lg(1/4) = -2, koska $2^{-2} = 1/2^2 = 1/4$.

## 2. Summamerkinnästä

Olkoot $a_1, a_2, \ldots a_{k-1}, a_k$ lukuja. Niiden summasta $a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + a_k$ käytetään lyhennysmerkintää $\sum_{i=1}^{k} a_i$ .

Tavallisesti esiintyviä summalausekkeita ovat

**Aritmeettinen summa** $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n = n \cdot (n+1)/2$.

**Geometrinen summa** $\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + \ldots + x^{(n-1)} + x^n = \dfrac{x^{(n+1)} - 1}{x - 1}$.

## 3. Aritmeettisia merkintöjä

**Jakojäännöksillä** laskemista sanotaan **modulaariaritmetiikaksi.** Jakojäännöksellä tarkoitetaan kokonaislukujen jakolaskussa ylijäävää osaa, esimerkiksi luvun 12 jakojäännös luvun 5 suhteen on 2, koska 12 = 2·5+2. Tällöin merkitään $12 \equiv 2 \pmod 5$.

Merkintä $\lfloor x \rfloor$ **(kokonaisosa,** ”floor”) tarkoittaa suurinta kokonaislukua, joka on korkeintaan yhtä suuri kuin *x*. Merkintä $\lceil x \rceil$ (”ceiling”) tarkoittaa pienintä kokonaislukua, joka on vähintään yhtä suuri kuin *x*.

**Esimerkki.** $\lfloor 3.8 \rfloor = 3$ ja $\lceil 3.8 \rceil = 4$.

## 4. Potenssien ja logaritmien laskusääntöjä

**Potenssit:** $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$, $\dfrac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$ ja $(x^a)^b = x^{a \cdot b}$

**Logaritmit:** $\lg(ab) = \lg(a) + \lg(b)$, $\lg(a/b) = \lg(a) - \lg(b)$ ja $\lg(a^b) = b \cdot \lg(a)$.