811312A Tietorakenteet ja algoritmit, 17.3.2014

1. Vastaa seuraaviin kysymyksiin:
   a) Mitä tarkoittaa algoritmin **täydellinen oikeellisuus**? (2p)
   b) Seuraavan algoritmin tulisi palauttaa taulukko, jossa ovat parametrina annettavan taulukon alkiot päinvastaisessa järjestyksessä.

```
Syöte: Taulukko A[1,..,n], n >= 1
Tulostus: Taulukko B, jossa alkiot päinvastaisessa järjestyksessä.

REVERSE(A)
varaa taulukko B[1..n]
i = 1
while i <= n
   B[i] = A[n+1-i]
   i = i+1
return B
```

   Todista algoritmi oikeaksi (4p).

2. Vastaa seuraaviin kysymyksiin
   a) Mitä tarkoittaa algoritmin **aikakompleksisuus**? (2p)
   b) Mikä on alla olevan lisäyslajittelualgoritmin **kompleksisuusluokka**? Perustele! Voit tarkastella ainoastaan huonointa tapausta. (4p)

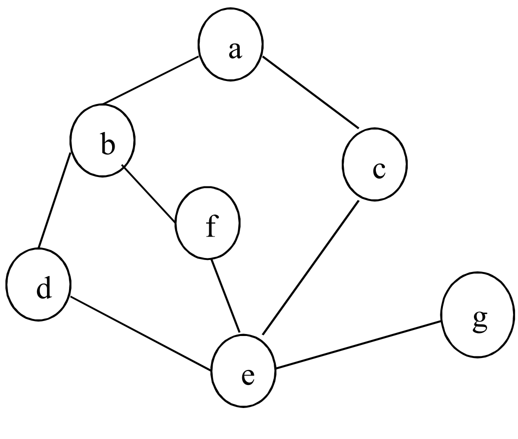
```
Syöte: Taulukko A[1,..,n], n >= 1
Tuloste: Taulukon luvut järjestyksessä A[1] <= … <= A[n]

LISAYS(A)
for j = 2 to n
   k = A[j]
   i = j-1
   while i>=1 && A[i]>k
      A[i+1] = A[i]
      i = i-1
   A[i+1] = k
return
```

3. Määritä Huffmanin koodi merkeille a, b, c, d, e, ja f, kun merkkien esiintymisfrekvenssit ovat seuraavat: a:32, b:9, c:19, d:12, e:20, f:8 (yhteensä 100 merkkiä). Kuinka monta bittiä säästyy verrattuna siihen, että jokainen merkki esitetään kolmella bitillä?

Jatkuu toisella puolella ->

4. Suorita **leveyshaku** seuraavalle suuntaamattomalle verkolle lähtien solmusta a. Käytä verkolle **vieruslistaesitystä**.



Kirjoita näkyviin algoritmissa käytetyn jonon ja kolmen taulukon sisältö kussakin algoritmin vaiheessa. Näytä, miten algoritmin tuloksista voidaan lukea lyhin polku solmusta a solmuun g.

5. Täytä alla olevaan taulukkoon ensimmäisessä sarakkeessa esitettyjen operaatioiden suoritusajan kompleksisuusluokka huonoimmassa tapauksessa, kun L on lista, jossa on n alkiota. Listan tyyppi on annettu taulukon ensimmäisellä rivillä. Perustele myös vastauksesi. Järjestetyssä listassa avainten oletetaan olevan järjestyksessä pienimmästä suurimpaan.

	Yhteen suuntaan linkitetty järjestämätön lista	Yhteen suuntaan linkitetty järjestetty lista	Kahteen suuntaan linkitetty järjestämätön lista	Kahteen suuntaan linkitetty järjestetty lista
ETSI(L,k)				
LISÄÄ(L,x)				
POISTA(L,x)				
MINIMI(L)				
MAKSIMI(L)				

Operaatio ETSI(L,k) tarkoittaa avaimen k etsimistä listasta, operaatio palauttaa osoittimen ko. avaimen sisältävään solmuun. Operaatioissa LISÄÄ(L,x) ja POISTA(L,x) parametri x on osoitin lisättävään tai poistettavaan solmuun. Operaatio MINIMI palauttaa osoittimen listan pienimmän ja MAKSIMI suurimman avaimen sisältävään solmuun

Tentin tulokset julkistetaan viimeistään 8.4.2014

Merkintöjä avuksi

1. Funktioista

Muotoa $f(x) = a_k \cdot x^k + a_{k-1} \cdot x^{k-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$ oleva funktio on **polynomifunktio**.

Funktio $f(x) = a^x$ on **potenssifunktio**.

Logaritmifunktio on potenssifunktion käänteisfunktio, eli $x = a^b \Leftrightarrow \log_a(b) = x$. Luku a on logaritmin **kantaluku**.

Yleisimmin esiintyy 2-kantainen logaritmi (a=2), josta käytetään merkintää lg, siis $\lg(b) = x \Leftrightarrow x = 2^b$.

Esimerkki. lg(8) = 3, koska $2^3=8$. Edelleen lg(128) = 7, koska $2^7=128$ ja lg(1/4) = -2, koska $2^{-2}= 1/2^2 = 1/4$.

2. Summamerkinnästä

Olkoot $a_1, a_2, \ldots a_{k-1}, a_k$ lukuja. Niiden summasta $a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + a_k$ käytetään lyhennysmerkintää $\sum_{i=1}^{k} a_i$.

Tavallisesti esiintyviä summalausekkeita ovat

Aritmeettinen summa $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n = n \cdot (n+1)/2$.

Geometrinen summa $\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + \ldots + x^{(n-1)} + x^n = \dfrac{x^{(n+1)} - 1}{x - 1}$.

3. Aritmeettisia merkintöjä

Jakojäännöksillä laskemista sanotaan **modulaariaritmetiikaksi**. Jakojäännöksellä tarkoitetaan kokonaislukujen jakolaskussa ylijäävää osaa, esimerkiksi luvun 12 jakojäännös luvun 5 suhteen on 2, koska 12 = 2·5+2. Tällöin merkitään $12 \equiv 2 \pmod 5$.

Merkintä $\lfloor x \rfloor$ (**kokonaisosa**, ”floor”) tarkoittaa suurinta kokonaislukua, joka on korkeintaan yhtä suuri kuin *x*. Merkintä $\lceil x \rceil$ (”ceiling”) tarkoittaa pienintä kokonaislukua, joka on vähintään yhtä suuri kuin *x*.

Esimerkki. $\lfloor 3.8 \rfloor = 3$ ja $\lceil 3.8 \rceil = 4$.

4. Potenssien ja logaritmien laskusääntöjä

Potenssit: $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$, $\dfrac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$ ja $(x^a)^b = x^{a \cdot b}$

Logaritmit: $\lg(ab) = \lg(a) + \lg(b)$, $\lg(a/b) = \lg(a) - \lg(b)$ ja $\lg(a^b) = b \cdot \lg(a)$.