811312A Tietorakenteet ja algoritmit, 13.1.2014

1. Vastaa seuraaviin kysymyksiin:
   a) Mitä tarkoittaa algoritmin **täydellinen oikeellisuus**? (2p)
   b) Seuraavan algoritmin tulisi palauttaa parametrina annettavan taulukon alkioista suurin.

```
Syöte: Taulukko A[1,..,n], n >= 1
Tulostus: Suurin taulukon alkio

MAKSIMI(A)
      m = A[1]
      i = 2
      while i <= n
         if A[i] > m
            m = A[i]
         i = i+1
      return m
```

   Todista algoritmi oikeaksi (4p).

2. Vastaa seuraaviin kysymyksiin
   a) Mitä tarkoittaa algoritmin **aikakompleksisuus**? (2p)
   b) Mikä on alla olevan vaihtolajittelualgoritmin **kompleksisuusluokka**? Perustele! (4p)

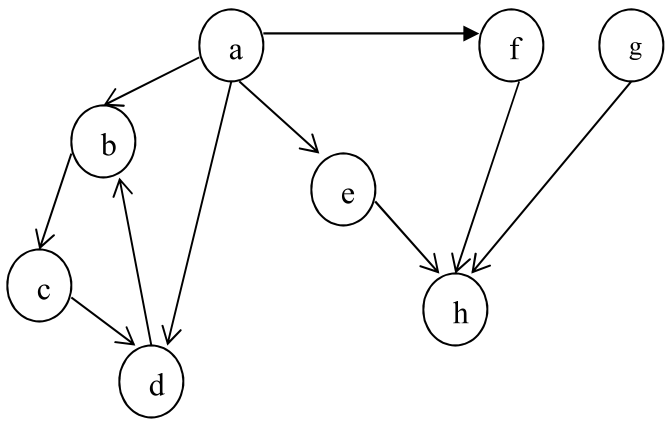
```
Syöte: Taulukko A[1,..,n], n >= 1
Tulostus: Taulukon luvut järjestyksessä A[1] <= … <= A[n]

VAIHTOLAJITTELU(A)
      for i = 1 to n
         for j = (i+1) to n
            if A[i]>A[j]
              x = A[i]
              A[i] = A[j]
              A[j] = x
      return
```

3. Shakkilaudan vasemmassa yläkulmassa on nappula, joka voi siirtyä sijaintiruudustaan ainoastaan oikealle tai alas seuraavaan ruutuun. Pelaajan on siirrettävä nappula oikeaan alakulmaan. Aina nappulan siirtyessä ruutuun pelaaja saa ruudun osoittaman pistemäärän. Alku- ja loppuruudusta ei saa pisteitä. Mikä on alla olevalla 4*4-laudalla suurin mahdollinen pistemäärä ja millä reitinvalinnalla se saavutetaan? Ratkaise ongelma käyttämällä **dynaamista taulukointia**.

	4	4	2
3	5	2	6
5	3	3	4
4	2	5	

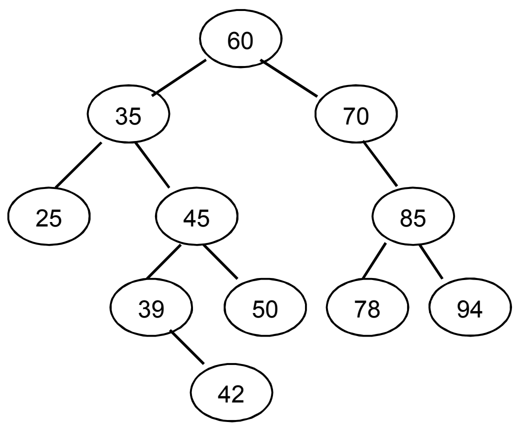
Jatkuu toisella puolella ->

4. Suorita **syvyyshaku** seuraavalle suunnatulle verkolle.



Käytä verkolle **vieruslistaesitystä**. Esitä algoritmi vaiheittain ja kirjoita näkyviin kunkin solmun havaitsemisajat ja käsittelyn lopetusajat. Luokittele verkon välit puuväleihin, takautuviin väleihin, eteneviin väleihin ja sivuttaisväleihin. Miten algoritmi havaitsee verkon solmujen b, c ja d muodostaman syklin?

5. Vastaa seuraaviin kysymyksiin (3p kummastakin):
   a) Poista alla olevasta **binäärisestä etsintäpuusta** ensin avain 70 ja sitten avain 35. Esitä operaatiot graafisesti ja kuvaa niiden vaiheet.



   b) Tallenna avaimet 6, 15, 31, 26, ja 37 hashtaulukkoon, jonka koko on 11, kun tiivistefunktio on $f(k) = k(\text{mod}11)$ ja törmäyksien hallintaan käytetään lineaarista luotausta.

Tentin tulokset julkistetaan viimeistään 4.2.2014

Merkintöjä avuksi

1. Funktioista

Muotoa $f(x) = a_k \cdot x^k + a_{k-1} \cdot x^{k-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$ oleva funktio on **polynomifunktio**.

Funktio $f(x) = a^x$ on **potenssifunktio**.

Logaritmifunktio on potenssifunktion käänteisfunktio, eli $x = a^b \Leftrightarrow \log_a(b) = x$. Luku a on logaritmin **kantaluku**.

Yleisimmin esiintyy 2-kantainen logaritmi (a=2), josta käytetään merkintää lg, siis $\lg(b) = x \Leftrightarrow x = 2^b$.

Esimerkki. lg(8) = 3, koska 2^3=8. Edelleen lg(128) = 7, koska 2^7=128 ja lg(1/4) = -2, koska 2^{-2}= $1/2^2$ = 1/4.

2. Summamerkinnästä

Olkoot $a_1, a_2, \ldots a_{k-1}, a_k$ lukuja. Niiden summasta $a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + a_k$ käytetään lyhennysmerkintää $\sum_{i=1}^{k} a_i$.

Tavallisesti esiintyviä summalausekkeita ovat

Aritmeettinen summa $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n = n \cdot (n+1)/2$.

Geometrinen summa $\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + \ldots + x^{(n-1)} + x^n = \dfrac{x^{(n+1)} - 1}{x - 1}$.

3. Aritmeettisia merkintöjä

Jakojäännöksillä laskemista sanotaan **modulaariaritmetiikaksi**. Jakojäännöksellä tarkoitetaan kokonaislukujen jakolaskussa ylijäävää osaa, esimerkiksi luvun 12 jakojäännös luvun 5 suhteen on 2, koska 12 = 2·5+2. Tällöin merkitään $12 \equiv 2 \pmod 5$.

Merkintä $\lfloor x \rfloor$ (**kokonaisosa**, ”floor”) tarkoittaa suurinta kokonaislukua, joka on korkeintaan yhtä suuri kuin *x*. Merkintä $\lceil x \rceil$ (”ceiling”) tarkoittaa pienintä kokonaislukua, joka on vähintään yhtä suuri kuin *x*.

Esimerkki. $\lfloor 3.8 \rfloor = 3$ ja $\lceil 3.8 \rceil = 4$.

4. Potenssien ja logaritmien laskusääntöjä

Potenssit: $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$, $\dfrac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$ ja $(x^a)^b = x^{a \cdot b}$

Logaritmit: $\lg(ab) = \lg(a) + \lg(b)$, $\lg(a/b) = \lg(a) - \lg(b)$ ja $\lg(a^b) = b \cdot \lg(a)$.